

APPROCHE D'UN REEL PAR DICHOTOMIE

Explications sur un exemple

On se propose de résoudre l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ (E).
 En désignant par f la fonction $x \mapsto x^3 + 2x - 1$, l'équation (E) s'écrit $f(x)=0$.

1. Existence d'une solution

- a) Étudiez la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ puis démontrez que l'équation (E) a une solution et une seule que l'on note α , et que $0 < \alpha < 1$.
- b) Représentez la fonction f restreinte à l'intervalle $[0 ; 1]$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 10 cm en abscisse, 2 cm en ordonnée).

2. Construction de deux suites

Nous allons définir deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a . Pour cela, nous allons encadrer α de plus en plus finement en utilisant le principe suivant :

- ☐ On partage l'intervalle $[0 ; 1]$ en deux intervalles de même longueur $I_1 = [0 ; 1/2]$ et $I_2 = [1/2 ; 1]$.
- ☐ On cherche celui de ces deux intervalles qui contient α : si c'est I_1 , on pose $u_1 = 0$ et $v_1 = 1/2$, si c'est I_2 , on pose $u_1 = 1/2$ et $v_1 = 1$.
- ☐ Puis à partir de l'intervalle I_1 , (ou I_2) qui contient α , on réitère l'opération: partage en deux, localisation de α , ...

On construit ainsi deux suites :

- celle des extrémités inférieures qui est croissante. Notons-la (u_n) , avec $u_0 = 0$;
- celle des extrémités supérieures qui est décroissante. Notons-la (v_n) , avec $v_0 = 1$. La localisation est facilitée par la monotonie de la fonction f .

(Pour tout n , $f(u_n) \leq 0 \leq f(v_n)$)

- a) Vérifiez que $[u_1 ; v_1] = [0 ; 0,5]$ et que $[u_2 ; v_2] = [0,25 ; 0,5]$. Placez les réels u_1, v_1, u_2 et v_2 sur l'axe des abscisses.
- b) Trouvez $u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5$ et placez-les sur l'axe des abscisses.
- c) Démontrez que, pour tout entier n , $v_n - u_n \leq (1/2)^n$, $v_n - \alpha \leq (1/2)^n$, $\alpha - u_n \leq (1/2)^n$.

Déduisez-en le nombre de partages nécessaires pour parvenir à un encadrement de longueur inférieure à 10^{-3} . Trouvez cet encadrement.

- d) Expliquez pourquoi les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite. Soit α leur limite commune. Quel théorème a-t-on vérifié avec cet exemple ?

Conclusion : Ce que nous venons de faire sur un exemple est généralisable. Lorsqu'une solution de l'équation $f(x)=0$ est localisée dans un intervalle $[a ; b]$, la dichotomie consiste à définir deux suites (u_n) et (v_n) encadrant et convergeant vers cette solution.

Lorsque $f(u_n)$ et $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)$ sont de signes contraires, on pose : $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

Lorsque $f(u_n)$ et $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)$ sont de même signe, on pose : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$

