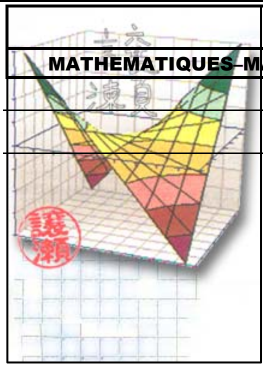

RESOLUTION DE L'EQUATION au + bv = c

Un peu d'histoire : *C'est Diophante, mathématicien grec, qui le premier, semble-t-il, a étudié ces équations. De Diophante, on sait peu de choses (sans doute a-t-il vécu au I^er^ ou au III^e^ siècle). Son influence a été très grande au Moyen Âge et à la Renaissance, et dans le renouveau de la théorie des nombres amorcée par Pierre de Fermat (1601-1665).*

⊡ Présentation du problème

a, b, c étant des nombres entiers, l'équation ***ax + by = c*** *où x* et y sont les inconnues à trouver dans Z, est appelée **«équation diophantienne»**.

Les équations diophantiennes sont des équations algébriques à plusieurs inconnues dont les termes connus sont des entiers ou des rationnels et dont on cherche les solutions entières.

Ce sont souvent des équations délicates à résoudre. Car, s'il est facile de trouver les solutions réelles de 3x + 4y = 0, il est moins facile de trouver des solutions entières.

⊡ Étude d'un cas particulier

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à l'équation ***au + bv =* g**, *où* g est le PGCD de *a* et de *b.*

(note: cette solution peut être trouvée avec l'algorithme d'Euclide)

1. Supposons trouvée une solution particulière (u_0, v_0) de l'équation ***au + bv = g****.*

Notons (u, v) une autre solution de cette équation et posons $a'=\frac{a}{g}$ et $b'=\frac{b}{g}$.

a) Justifiez l'égalité $a'(u - u_0) + b'(v - v_0) = 0$ puis utilisez le théorème de Gauss pour démontrer qu'il existe un entier relatif *k* tel que $v - v_0 = ka'$.

Déduisez-en finalement que $u = u_0 - kb'$ et $v = v_0 + ka'$.

b) Réciproquement, prouvez que si $u = u_0 - kb'$ et $v = v_0 + ka'$ avec *k* entier relatif, alors ***au +bv = g****.*

2. Application

a) Le PGCD de 114 et de 30 est 6. Trouvez tous les couples (u,v) d'entiers relatifs tels que 114u + 30v = 6.

b) Interprétez graphiquement ce résultat.

⊡ Cas général

On suppose maintenant que c est un entier quelconque. *a* et *b* sont des entiers donnés, $a > b > 0$.

1. a) Prouvez que si c n'est pas un multiple du PGCD de *a* et de *b,* alors l'équation *ax + by*= *c* n'a pas de solution.

b) On suppose que c est un multiple du PGCD de *a* et de *b,* soit c = *cg.* Résolvez alors l'équation ***ax + by = c****.*

2. Application

a) Dans un repère choisi, la droite *d* a pour équation 47x + 35y = 1.

Trouvez tous les points de *d* dont les coordonnées sont entières.

b) Même question avec la droite d'équation 33 810x + 4116y = 588.