Quelques exercices d'arithmétique (divisibilité , division euclidienne)

Exercise .1 *Si on divise 4 294 et 3 521 par un même entier positif on obtient respectivement pour restes 10 et 11. Quel est ce nombre ?*
$4294 = bq + 10$ *et* $3521 = bq' + 11$
donc: $bq = 4284$ *et* $bq' = 3510$
b *divise donc* 4284 *et* 3510. *Donc* b *divise :* $4284 \wedge 3510 = 18$ *(aprés calcul)*
comme de plus b *est supérieur à* 11 *on en déduit que* $\boxed{b = 18}$

Exercise .2 *Démontrer que si les entiers a et a' ont pour restes respectifs r et r' dans la division euclidienne par l'entier k alors aa' a le même reste que rr' dans la division par k*
$a = kq + r$ *et* $a' = kq' + r'$ *donc* $aa' = (kq + r)(kq' + r') = ... = k(qq' + qr' + q'r) + rr'$
Donc si l'on a $rr' = kq'' + r''$ *on aura bien :* $aa' = k(qq' + q'r + qr' + q'') + r''$

Exercise .3 *Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par 4.*
Soit $n = 2k + 1$ *un nombre impair (* k *entier). Le nombre impair suivant est :* $n + 2 = 2k + 3$
et $n + (n + 2) = 2k + 1 + 2k + 3 = 4k + 4$ *est divisible par 4*

Exercise .4 *Trouver deux nombres entiers naturels* x *et* y *tel que* $x^2 - y^2 = 24$.
$x^2 - y^2 = 24 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 24$. *Les diviseurs positifs de* 24 *sont :* $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$
on peut aussi remarquer que $x - y < x + y$ *d'où quatre cas à étudier.*
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 24 \end{cases} ; \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 12 \end{cases} ; \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 8 \end{cases} ; \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$
ce qui donne : $\begin{cases} x = \dfrac{25}{2} \\ y = \dfrac{23}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} ; \begin{cases} x = \dfrac{11}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$
on a donc deux solutions possibles: $\boxed{\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} ; ; \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}}$

Exercise .5 *Démontrer par récurrence que :* $n(2n+1)(7n+1)$ *est divisible par 6 pour tout n appartenant a* $\mathbb{N}$*.
pour $n = 1$: $n(2n + 1)(7n + 1) = 24$ *est divisible par* 6
supossons que $n(2n + 1)(7n + 1) = 14n^3 + 9n^2 + n$ *est divisible par* 6
Alors $(n + 1)(2(n + 1) + 1)(7(n + 1) + 1) = ... = 14n^3 + 51n^2 + 61n + 24$
$= 14n^3 + 9n^2 + n + 42n^2 + 60n + 24 = 14n^3 + 9n^2 + n + 6(7n^2 + 10n + 4)$ *est donc divisible par* 6 *car* $14n^3 + 9n^2 + n$ *l'est par hypothèse.*

Exercise .6 *Montrer que si* n *est pair, les nombres* $a = n(n^2 + 20); b = n(n^2 - 20); c = n(n^2 + 4)$ *sont divisibles par 8*

[0] http://pierre.warnault.free.fr

Posons $n = 2k$ (k entier). Alors $a = 2k(4k^2 + 20) = 8k(k^2 + 5)$, $b = 2k(4k^2 - 20) = 8k(k^2 - 5)$ et $c = 2k(4k^2 + 4) = 8k(k^2 + 1)$
a, b, c sont donc divisibles par 8

Exercise .7 *Trouver n dans $\mathbb{N}^*$ pour que $(n+8)$ soit divisible par n et $(3n+24)$ soit divisible par $n - 4$.*
n divise $n + 8$ donc n divise 8. Donc $n = 1, 2, 4$ ou 8
De plus : $3n + 24 = 3(n - 4) + 36$. Il faut donc également que $n - 4$ divise 36. On vérifie facilement que les valeurs $1, 2, 8$ conviennent. (par contre 4 est à exclure car on ne peut diviser par 0)

Exercise .8 *Démontrer que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6. En déduire que le produit de trois nombres pairs consécutifs est divisible par 48*
Soit n un entier . Alors $n \equiv k[3]$ avec $k = 0, 1$ ou 2
Donc $n + 1 \equiv k + 1[3]$ et $n + 2 \equiv k + 2[3]$
d'où : $n(n + 1)(n + 2) \equiv k(k + 1)(k + 2)[3]$
pour $k = 0, n(n + 1)(n + 2) \equiv 0[3]$
pour $k = 1, n(n + 1)(n + 2) \equiv 6[3] \equiv 0[3]$
pour $k = 2, n(n + 1)(n + 2) \equiv 24[3] \equiv 0[3]$
$n(n + 1)(n + 2)$ est donc divisible par 6

Prenons maintenant trois nombres pairs consécutifs; Soit $2n$ le premier. Las suivants sont $2n + 2 = 2(n + 1)$ et $2n + 4 = 2(n + 2)$

$2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 48 car $n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 6

Exercise .9 *On appelle diviseur propre d'un entier naturel tout diviseur positif de cet entier autre que lui-même. Deux entiers naturels sont dits amicaux lorsque la somme des diviseurs propres de chacun est égal à l'autre. Montrer que 220 et 284 sont amicaux.*
Il faut dresser la liste des diviseurs propres de chacun.
$220 = 10 * 22 = 2^2 * 5 * 11$. $D^+(220) = \{1, 2, 4, 10, 22, 110, 40, 44, 220, 5, 55, 11\}$
$284 = 4 * 71 = 2^2 * 71$. $D^+(284) = \{1, 2, 4, 142, 284, 71\}$
et : $1 + 2 + 4 + 10 + 22 + 110 + 40 + 44 + 5 + 55 + 11 = 284$
$1 + 2 + 4 + 142 + 71 = 220$

Exercise .10 *Trouver le reste de la division par 7 du nombre A = 247349.*
$247349 = 210000+37349 = 210000+35000+2349 = 210000+35000+2100+249$
$= 210000+35000+2100+210+39 = 210000+35000+2100+210+35+4 \equiv 4[7]$

Exercise .11 *La différence de deux entiers est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 22. Quels sont ces deux entiers ?*
$a - b = 538$ et $a = 13b + 22$
donc: $12b + 22 = 538 \Leftrightarrow 12b = 516 \Leftrightarrow b = 43$ et donc $a = 538 + b = 581$

Exercise .12 *La somme de deux entiers est 2096. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 5 et le reste 206. Quels sont ces deux entiers ?*
$a + b = 2096$ *et* $a = 5b + 206$
donc: $6b + 206 = 2096 \Leftrightarrow 6b = 1880 \Leftrightarrow b = 315$ *et donc* $a = 2096 - b = 1781$

Exercise .13 *a est un entier relatif. Démontrer que le nombre* $a(a^2 - 1)$ *est divisible par 6.*
$a(a^2 - 1) = a(a+1)(a-1)$ *et le produite de trois entiers consécutifs est divisble par 6 (traité dans un exercice auparavant)*

Exercise .14 *Montrer que, si x est un entier naturel non divisible par 5, alors le reste dans la division euclidienne de* x^4 *par 5 est 1*
$x \equiv 1, 2, 3$ *ou* $4[5]$
or $1^4 = 1.,2^4 = 16 \equiv 1[5], 3^4 = 81 \equiv 1[5], 4^4 = 256 \equiv 1[5]$ *d'où le résultat*

Exercise .15 *Déterminer n dans* $\mathbb{N}^*$ *de telle sorte que la division de n par 64 donne un reste égal au cube du quotient.*
le problème est donc : $n = 64q + q^3$ *et il faut que* $0 \leq q^3 < 64$ *. Cette dernière condition impose donc que* $0 \leq q < 4$
On peut donc avoir $q = 0, 1, 2$ *ou* 3 *soit* $n = 0, 65, 136$ *ou* 219

Exercise .16 *Etudier les restes des divisions par 9 des puissances successives de 2. Démontrer que le nombre* $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 1$ *est toujours divisible par 9 quelque soit l'entier naturel n ?*
$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8 \equiv -1[9], 2^4 = 16 \equiv -2[9], 2^5 = 32 \equiv -4[9], 2^6 = 64 \equiv 1[9]$
Et le cycle recommence... Les restes des puissances de 2 modulo 9 sont donc : $1, 2, 4, -1, -2, -4$...
on démontre de plus (facilement par récurrence) que $2^{2n} \equiv 1$ *ou* $4ou -2[9]$ *et* $2^{2n+1} \equiv 2$ *ou* $-1ou -4[9]$ *(selon que n est congru à 0,1 ou 2 modulo 3)*
donc $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) \equiv 1(2 - 1)$ *ou* $4(-1 - 1)$ *ou* $-2(-4 - 1)[9] \equiv 1[9]$ *dans les trois cas !en enlevant un, le nombre est donc divisible par* 9

Exercise .17 *soit b un entier naturel inférieur ou égal à 11. c et r sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de 132 par b.*

a.$132 = bc + r$ avec $0 \leq r < b$

b.Démontrer que $b \leq c$.

Supposons $b > c$. On a $b \leq 11$ donc $c \leq 10$ donc $bc \leq 110$ d'où $r \geq 22$ ce qui est impossible car $r < b$

c.on a bien .$132 = bc + r$ avec $0 \leq r < c$ car $0 \leq r < b$ (d'aprés a)) et $b \leq c$

d.Montrer que si lon abandonne l'hypothèse $0 \leq b \leq 11$, le résultat de la question c, n'est pas toujours vrai.

il suffit de donner un contre-exemple. Par exemple : $b = 20$ alors $c = 6$ et $r = 12$ alors que si on divise 132 par 6 le quotient est 21 et il reste 0

Exercise .18 *Démontrer que si p est impair, la somme de p nombres consécutifs est un multiple de p*
Soit $n, n+1, ..., n+p-1$ p entiers consécutifs.Parmi ces p entiers, l' un sera divisible par p. Pour le montrer on peut faire ainsi:
Effectuons la division euclidienne de n par p : $n = qp + r$ avec $0 \leq r < p$
si $r = 0$ alors p divise n.
Sinon p divise $n + (p-r)$ (qui est bien dans la liste voulue puisque $p - r < p$ (car $0 < r$)
remarque: le résultat est d'ailleurs valable même si p est pair.

Exercise .19 *a et b sont des entiers naturels*

a. Montrer que $a^5 - a$ est divisible par 10.
$a^5 - a = a(a^4-1) = a(a^2-1)(a^2+1) = a(a-1)(a+1)(a^2+1)$
ce nombre est déja divisible par 2 car a et $a-1$ sont deux entiers consécutifs. Reste à montrer qu'il est divisible par 5.
On a : $a \equiv 0, 1, 2, 3$ ou $4[5]$.Traitons les différents cas.
si $a \equiv 0[5]$ alors $a(a-1)(a+1)(a^2+1)$ est divisible par 5
si $a \equiv 1[5]$ alors $a-1 \equiv 0[5]$ donc $a(a-1)(a+1)(a^2+1)$ est divisible par 5
si $a \equiv 4[5]$ alors $a+1 \equiv 0[5]$ donc $a(a-1)(a+1)(a^2+1)$ est divisible par 5
si $a \equiv 2[5]$ alors $a^2 \equiv 4[5]$ d'où $a^2+1 \equiv 0[5]$ donc $a(a-1)(a+1)(a^2+1)$ est divisible par 5
si $a \equiv 3[5]$ alors $a^2 \equiv 9[5]$ d'où $a^2+1 \equiv 0[5]$ donc $a(a-1)(a+1)(a^2+1)$ est divisible par 5

b. Démontrer que si $a^5 - b^5$ est divisible par 10 alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.
écrivons: $a^5 - b^5 = (a^5 - a) - (b^5 - b) + (a - b)$
On sait que 10 divise $(a^5 - a)$ et $(b^5 - b)$. On en déduit donc que 10 divise $a - b$.
Or : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. $a - b$ étant divisible par 10, on en déduit qu'il est pair. Donc $a + b$ est également pair (car $a + b = a - b + 2b$)
d'où: 20 divise $a^2 - b^2$

Exercise .20 *Déterminer tous les couples dentiers naturels (a, b) tels que $a \wedge b = 5$ et $a \vee b = 8160$.*
Nous prendrons la notation : $d = a \wedge b, m = a \vee b$.
On sait que: $ab = md$. En posant $a = da'$ et $b = db'$ ($a' \wedge b' = 1$) on obtient : $da'db' = md$ soit $da'b' = m$
on a donc ici : $8160 = 5a'b' \Leftrightarrow a'b' = 1632 = 32 * 51 = 32 * 3 * 17$
Puisque $a' \wedge b' = 1$, las cas possibles sont :
$\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 1632 \end{cases}, \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 544 \end{cases}, \begin{cases} a' = 17 \\ b' = 96 \end{cases}, \begin{cases} a' = 32 \\ b' = 51 \end{cases}$ *ainsi que les cas symétriques (* $\begin{cases} b' = 1 \\ a' = 1632 \end{cases}$....)
Pour obtenir a et b il ne reste qu'à multiplier par 5.

Exercise .21 *Déterminer tous les couples dentiers naturels (a, b) tels que $a \wedge b = 16$ et $a + b = 224$.*
avec les notation de l'exercice précédent :

$a+b=224 \Leftrightarrow 16a'+16b'=224 \Leftrightarrow a'+b'=14$
las cas possibles sont : (ne pas oublier que $a' \wedge b' = 1$ *)*
$\begin{cases} a'=1 \\ b'=13 \end{cases}, \begin{cases} a'=3 \\ b'=11 \end{cases}, \begin{cases} a'=5 \\ b'=7 \end{cases}$ *ainsi que les cas symétriques*
Pour obtenir a et b il ne reste qu'à multiplier par 16

Exercise .22 *Déterminer tous les couples dentiers naturels* (a, b) *tels que* $a \wedge b = 18$ *et* $a * b = 9072$
ici: $18a' * 18b' = 9072 \Leftrightarrow a'b' = 28 = 4 * 7$
Puisque $a' \wedge b' = 1$ *, las cas possibles sont :*
$\begin{cases} a'=1 \\ b'=28 \end{cases}, \begin{cases} a'=4 \\ b'=7 \end{cases}, \begin{cases} a'=7 \\ b'=4 \end{cases}, \begin{cases} a'=28 \\ b'=1 \end{cases}$
Pour obtenir a et b il ne reste qu'à multiplier par 18

Exercise .23 *a et b sont deux entiers, A = 11a + 2b et B = 18a + 5b.*
a.Démontrer que si l'un des deux nombres A ou B est divisible par 19, il en est de même pour l'autre.
on a : $18A - 11B = -19b$ *(l'idée est de faire une combinaison de manière à éliminer les a)*
Donc 19 *divise* $18A - 11B$
si de plus 19 divise A alors 19 divise $11B$
Or $19 \wedge 11 = 1$ *donc* 19 *divise* B.
et si 19 divise B alors 19 divise $18A$
Or $19 \wedge 18 = 1$ *donc* 19 *divise* A
b.Si a et b sont premiers entre eux, A et B ne peuvent avoir d'autres diviseurs communs que 1 et 19..
on a également : $5A - 2B = 19a$
Soit $D = A \wedge B$
Donc D divise $18A - 11B$ *et* $5A - 2B$ *c'est à dire :* $-19b$ *et* $19a$
Cela entraine que D divise 19. *On peut par exemple le montrer avec Bézout:*
a et b sont premiers entre eux, donc il existe deux entiers u, v *tels que :* $ua+vb = 1$
donc, en multipliant par 19: $u(19a) + (-v)(-19b) = 1$ *soit :* $u(5A - 2B) + (-v)(18A - 11B) = 19$
eton sait que D divise $18A - 11B$ *et* $5A - 2B$*...*
Finalement, puisque D divise 19, alors: $D = 1$ *ou* 19

Exercise .24 *Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors a + b et ab sont premiers entre eux. En est-il de même pour a +b et* $a^2 + b^2$*?*
une méthode simple (mais à condition d'avoir fait les nombres premiers...)
Soit p un diviseur premier de ab . Alors p divise a ou b. Prenons arbitrairement p divise a.
Puiques a et b sont premiers entre eux, p ne peut diviser b donc ne divise pas $a+b$ *. Ce qui prouve donc que* $a+b$ *et ab sont premiers entre eux .*
Autre méthode: avec Bézout: il existe deux entiers u et v tels que $ua + vb = 1$
Donc : $u(a + b) + (v - u)b = 1$ *donc*$a + b$ *et b sont premiers entre eux.*

Il en est de même pour $a+b$ et a.
Cela entraine donc que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.(en effet si l'on suppose le contraire, on aurait : $u(a+b)+v(ab)=1$ et donc $u(a+b)+(va)b=1$ et $a+b$ et b seraient premiers entre eux ce qui n'est pas le cas)

concernant $a+b$ et a^2+b^2, le résultat est faux. Il suffit de prendre $a=3$ et $b=5$ comme contre exemple