

Quelques exercices d'arithmétique (divisibilité , division euclidienne)

Exercice .1 Si on divise 4 294 et 3 521 par un même entier positif on obtient respectivement pour restes 10 et 11. Quel est ce nombre ?

Exercice .2 Démontrer que si les entiers a et a' ont pour restes respectifs r et r' dans la division euclidienne par l'entier k alors aa' a le même reste que rr' dans la division par k

Exercice .3 Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par 4.

Exercice .4 Trouver deux nombres entiers naturels x et y tel que $x^2 - y^2 = 24$.

Exercice .5 Démontrer par récurrence que : $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6 pour tout n appartenant à \mathbb{N}^* .

Exercice .6 Montrer que si n est pair, les nombres $a = n(n^2 + 20)$; $b = n(n^2 - 20)$; $c = n(n^2 + 4)$ sont divisibles par 8

Exercice .7 Trouver n dans \mathbb{N}^* pour que $(n+8)$ soit divisible par n et $(3n+24)$ soit divisible par $n - 4$.

Exercice .8 Démontrer que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6. En déduire que le produit de trois nombres pairs consécutifs est divisible par 48

Exercice .9 On appelle diviseur propre d'un entier naturel tout diviseur positif de cet entier autre que lui-même. Deux entiers naturels sont dits amicaux lorsque la somme des diviseurs propres de chacun est égal à l'autre. Montrer que 220 et 284 sont amicaux.

Exercice .10 Trouver le reste de la division par 7 du nombre $A = 247349$.

Exercice .11 La différence de deux entiers est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 22. Quels sont ces deux entiers ?

Exercice .12 La somme de deux entiers est 2096. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 5 et le reste 206. Quels sont ces deux entiers ?

Exercice .13 a est un entier relatif. Démontrer que le nombre $a(a^2 - 1)$ est divisible par 6.

Exercice .14 Montrer que, si x est un entier naturel non divisible par 5, alors le reste dans la division euclidienne de x^4 par 5 est 1.

⁰<http://pierre.warnault.free.fr>

Exercice .15 Déterminer n dans \mathbb{N}^* de telle sorte que la division de n par 64 donne un reste égal au cube du quotient.

Exercice .16 Étudier les restes des divisions par 9 des puissances successives de 2. Démontrer que le nombre $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 1$ est toujours divisible par 9 quelque soit l'entier naturel n ?

Exercice .17 soit b un entier naturel inférieur ou égal à 11. c et r sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de 132 par b .

a.Écrire les relations qui traduisent ces hypothèses.

b.Démontrer que $b \leq c$.

c.Démontrer que dans la division euclidienne de 132 par c , le quotient est b et que le reste est inchangé (cest à dire r).

d.Montrez que si l'on abandonne l'hypothèse $0 \leq b \leq 11$, le résultat de la question c, n'est pas toujours vrai.

Exercice .18 Démontrer que si p est impair, la somme de p nombres consécutifs est un multiple de p

Exercice .19 a et b sont des entiers naturels

a. Montrer que $a^5 - a$ est divisible par 10.

b. Démontrer que si $a^5 - b^5$ est divisible par 10 alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

Exercice .20 Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a \wedge b = 5$ et $a \vee b = 8160$.

Exercice .21 Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a \wedge b = 16$ et $a + b = 224$.

Exercice .22 Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a \wedge b = 18$ et $a * b = 9072$

Exercice .23 a et b sont deux entiers, $A = 11a + 2b$ et $B = 18a + 5b$.

a.Démontrer que si l'un des deux nombres A ou B est divisible par 19, il en est de même pour l'autre.

b.Si a et b sont premiers entre eux, A et B ne peuvent avoir d'autres diviseurs communs que 1 et 19..

Exercice .24 Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et ab sont premiers entre eux. En est-il de même pour $a + b$ et $a^2 + b^2$?