



PROBABILITES

TD : Loi d'équilibre génétique

Étant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est homozygote lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa. Une plante est hétérozygote lorsqu'elle est de génotype Aa.

Certaines plantes, le lupin par exemple, se reproduisent par autogamie (ou autofécondation) : tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard.

L'objectif de ce TD est l'étude de la descendance par autogamie d'une plante hétérozygote.

1. Première génération

Une plante de génotype AA donne par autogamie une plante de génotype AA. De même, une plante de génotype aa donne une plante aa.

- Déterminez les probabilités que la descendance de première génération d'une plante de génotype Aa soit une plante de génotype AA, Aa ou aa.

Aide : Construisez un arbre.

2. Générations successives

Partant d'une plante hétérozygote (Aa à la génération 0), on constitue par autogamie des générations successives. On utilise les notations suivantes :

- $(AA)_n$ est l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype AA »,
- $(Aa)_n$ est l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype Aa »,
- $(aa)_n$ est l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype aa ».

On appelle x_n la probabilité de $(AA)_n$, y_n la probabilité de $(Aa)_n$ et z_n celle de $(aa)_n$.

a) Évaluez x_0 , y_0 et z_0 .

b) Calculez x_1 , y_1 et z_1 .

c) Exprimez la probabilité conditionnelle de $(AA)_{n+1}$ sachant $(AA)_n$, puis celle de $(AA)_{n+1}$ sachant $(Aa)_n$ et enfin de $(Aa)_{n+1}$ sachant $(Aa)_n$.

En utilisant les résultats précédents, démontrez que pour tout entier n :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$$

Donner l'expression de z_{n+1} .

3. Études des suites (x_n) , (y_n) et (z_n)

a) Calculez les valeurs de x_n , y_n et z_n de $n = 0$ à 10 à l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice. Que pouvez-vous conjecturer sur les trois suites ?

b) Quelle est la nature de la suite (y_n) ? Exprimez y_n en fonction de n.

c) En remarquant que :

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0) = \frac{1}{4}(y_{n-1} + y_{n-2} + \dots + y_0),$$

exprimez x_n en fonction de n.

4. Évolution dans le temps

Déterminez les limites des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) .