Épreuve pratique-1^{ere}S

Année scolaire 2006/2007

Version 1.0

May 5, 2007

Des professeurs de mathématiques du lycée André Malraux de Béthune

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Contents

1 Sujet 1: Barycentre 3

2 Sujet 2 :Lancer de fléchette 4

3 Sujet 3: Tangentes à une parabole 6

4 Sujet 4: Tangentes à une hyperbole 7

5 Sujet 5: Orthocentre 8

6 Sujet 6: Étude d'une suite 9

7 Sujet 7: Somme de termes consécutifs d'une suite 10

8 Sujet 8: Section d'un cube par un plan 11

9 Sujet 9: Aire maximale d'un rectangle inscrit dans un triangle 12

10 Grille d'évaluation 13

1 Sujet 1: Barycentre

Épreuve pratique	Sujet 1	Barycentre

On considère un triangle ABC.

Le but de l'exercice est d'étudier le lieu géométrique du point G_t,barycentre du système de points pondérés $\{(A,t),(B,t+1),(C,1)\}$,$t \in E$,où E est l'ensemble des réels différents de -1.

Partie TICE

1. Construire le point G_0 .Quelle conjecture pouvez-vous émettre?

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction et votre conjecture

2. Déterminer et représenter le lieu des points G_t lorsque t décrit E.

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction et votre conjecture

Travail à rendre sur copie

1. Démontrer que,pour $t \in E$,
$$t(\overrightarrow{G_tA} + \overrightarrow{G_tB}) = -(\overrightarrow{G_tB} + \overrightarrow{G_tC})$$

2. En déduire une démonstration de la propriété conjecturée au 2..

2 Sujet 2 :Lancer de fléchette

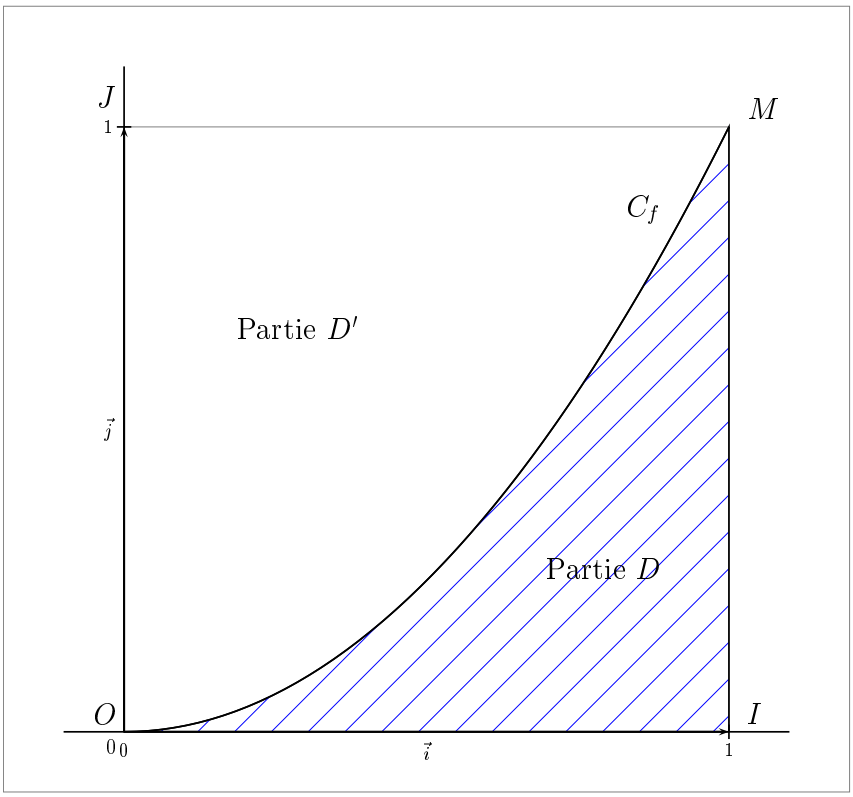
Épreuve pratique	Sujet 2	Lancer de fléchette

La figure ci-dessous représente une cible carrée $OIMJ$ telle que,dans le repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,la ligne courbe C_f reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur R par :$f(x) = x^2$.

Cette courbe partage la cible $OIMJ$ en deux parties ,D hachurée en bleue, et D' comme l'indique la figure.

Un jeu consiste à lancer une fléchette dans la cible .

On considère l'événement A:"la fléche se plante dans la partie hachurée en bleu D".



Le but de ce T-P est d'estimer la probabilité de l'événement A.

On admet que,lors d'un lancer de fléchette,celle-ci se plante dans tous les cas dans la cible $OIMJ$ et ne peut atteindre la courbe C_f

Partie TICE

1. À l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de calcul numérique,simulez $n = 100$ points $M(x; y)$ où x et y appartiennent à $[0; 1]$,et déterminez la fréquence des points M appartenant à la partie D.

   Appeler l'examinateur pour valider votre simulation

2. Recommencer l'épreuve avec pour valeurs de n les valeurs suivantes:1000;1500;2000;2500.

3. Remplir le tableau suivant:

Valeurs de n	Fréquence des points M appartenant à D
100	
1000	
1500	
2000	
2500	

4. Quel résultat pouvez-vous conjecturer quant à la fréquence des points M appartenant au domaine D,lorsque n croît?

Appeler l'examinateur pour valider votre simulation et votre conjecture

Travail à rendre sur copie

1. Quel résultat pouvez-vous conjecturer quant à la probabilité de l'événement A.(on prendra cette valeur pour la suite du T-P)?

2. On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante: On lance une fléchette sur la cible

- Si la fléchette se plante dans le domaine D,on gagne 120 euros.
- Si la fléchette se plante sur la cible ailleurs que dans D,on perd 30 euros.

Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

3. Quelle somme peut-on espèrer obtenir à ce jeu à l'issue d'un lancer?

3 Sujet 3: Tangentes à une parabole

Épreuve pratique	Sujet 3	Tangente à une parabole

On considère la parabole C d'équation: $y = \frac{1}{2}x^2$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Étant donné un réel t non nul,on se propose de mettre en évidence,puis de démontrer une propriété du point d'intersection des tangentes à la parabole C aux points M et M' d'abscisses respectives t et $t' = -\frac{1}{t}$.

Partie TICE

1. À l'aide d'un logiciel adapté,tracer la parabole C.
2. On se donne un réel t,placer le point M sur la parabole C.
3. Tracer la droite D tangente à C au point M d'abscisse t.

   Remarque: Si le logiciel utilisé le nécessite,calculez d'abord le coefficient directeur de cette tangente

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction
4. Placer sur la courbe C le point M' d'abscisse $t' = -\frac{1}{t}$.Tracer la droite D' tangente à C en M'. Placer le point P intersection de D et D'.

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction
5. Lorsque le réel t décrit $\mathbb{R}^*$,à quel ensemble semble appartenir le point P?

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction et votre conjecture

Travail à rendre sur copie

1. Déterminer les équations des droites D et D'.
2. Déterminer les coordonnées du point P et conclure sur la propriété conjecturée précédemment.

4 Sujet 4: Tangentes à une hyperbole

Épreuve pratique	Sujet 4	Tangente à une hyperbole

Dans le plan muni d'un repère orthogonal$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la branche d'hyperbole (H),d'équation: $y = \dfrac{2}{x-2}$,$x \in]2; +\infty[$ ainsi que les droites D: $x = 2$ et D': $y = 0$, (on les appelle *axes de l'hyperbole* H).

Soit M un point quelconque appartenant à (H) et (T) la tangente à (H) en ce point. Soient P et Q les points d'intersection de (T) avec les axes de (H).

Partie TICE

1. Tracer (H) et ses axes.

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction

2. Tracer (T) coupant (D) en Q et (D') en P.

   Remarque: Si le logiciel utilisé le nécessite,calculez d'abord le coefficient directeur de cette tangente

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction

3. Faire varier M sur (H). Quelle conjecture peut-on émettre, quant à la position du point M sur $[PQ]$?

   Appeler l'examinateur pour valider votre conjecture

Travail à rendre sur copie

Soit a un réel quelconque différent de 2 et (T) la tangente à (H) au point M d'abscisse a. On admet que:

$$(T) : y = -\frac{2}{(a-2)^2}x + \frac{4a-4}{(a-2)^2}$$

1. Exprimer en fonction de a les coordonnées de P et Q.

2. Démontrer que M est le milieu du segment $[PQ]$.

5 Sujet 5: Orthocentre

Épreuve pratique	Sujet 5	Orthocentre

Dans le plan,muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,on considère les points $A(-2;0)$ et $B(2;0)$ ainsi que la droite Δ d'équation :$y = -5$.

Soit C un point de Δ et H l'orthocentre du triangle ABC.

Partie TICE

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique,construire la figure.

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction

2. Visualisez le lieu des points H lorsque C décrit Δ.Quelle conjecture peut-on faire sur l'ensemble Γ des points H ?

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction et votre conjecture

Travail à rendre sur copie

1. Justifier que C a pour coordonnées $(x;-5)$,où $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit y l'ordonnée de H.

   Quelle est alors l'abscisse de H?
3. Démontrer que:[H orthocentre de ABC] $\Longrightarrow$ $[y = \frac{1}{5}(x^2 - 4)]$.
4. Conclure.

.

6 Sujet 6: Étude d'une suite

Épreuve pratique	Sujet 6	Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$u_0 = 1$$
$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \text{ , pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

Partie TICE

1. À l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de calcul numérique,calculez les trente premiers termes de la suite.

2. Représentez graphiquement la suite.

3. Conjecturez l'expression explicite de u_n en fonction de n.

Appeler l'examinateur pour valider vos calculs et votre conjecture

Travail à rendre sur copie

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Pour quelle première valeur de n entière a-t'on :$u_n \geq 10^6$?

3. Que pouvez-vous conclure des deux questions précédentes ?

7 Sujet 7: Somme de termes consécutifs d'une suite

Épreuve pratique Sujet 7 Somme de termes consécutifs d'une suite

On définit pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n$$

et

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$$

Partie TICE

1. À l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de calcul numérique,calculez S_n et T_n pour tous les entiers n vérifiant: $1 \leq n \leq 30$
2. Quelle relation pouvez-vous conjecturer entre S_n et T_n?

   Appeler l'examinateur pour valider vos calculs et votre conjecture

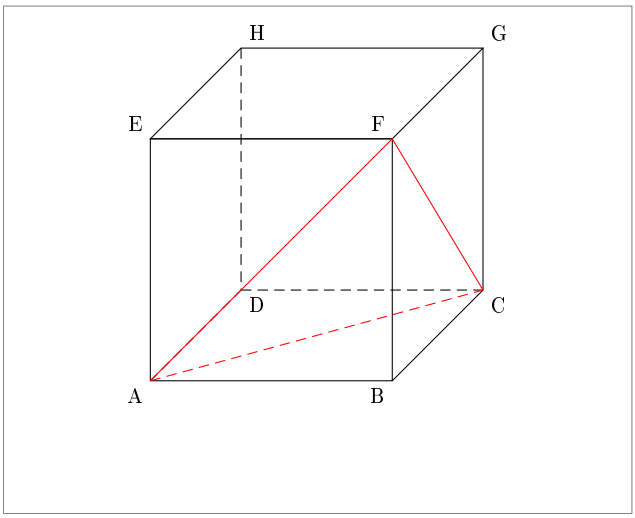
Travail à rendre sur copie

1. Après avoir remarqué que S_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique,exprimer S_n en fonction de n .
2. En utilisant le résultat de la question précédente et la conjecture que vous avez émise dans la première partie ,exprimez T_n en fonction de n.
3. Déterminer la première valeur de n entière pour laquelle $T_n \geq 10^6$.

8 Sujet 8: Section d'un cube par un plan

Épreuve pratique	Sujet 8	Section d'un cube

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 dessiné à droite. Soit (P) le plan (ACF) et I un point du segment $[EF]$. On note (P') le plan parallèle à (P) et passant par le point I.



Partie TICE

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique,dessiner la figure.

2. Tracer la section du cube par le plan (P').On notera W l'hexagone obtenu.

   On notera J, K, L, M, N les points d'intersection respectifs de W avec les segments $[AE]$, $[AD]$, $[CD]$, $[GC]$ et $[GF]$.

   Soient X et Y les points d'intersection de la droite (IJ) avec les droites (AB) et (BF) et Z l'intersection de (MN) avec (BC).

3. Faire varier le point I sur le segment $[EF]$ et conjecturer la nature du triangle XYZ puis la position du point I pour que l'aire de W,que l'on fera apparaître à l'écran, soit maximale.

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction et votre conjecture

Travail à rendre sur copie

1. Démontrer que l'aire de l'hexagone W est égale à l'aire du triangle XYZ moins trois fois celle du triangle XJK.

2. On pose $x = EI$.

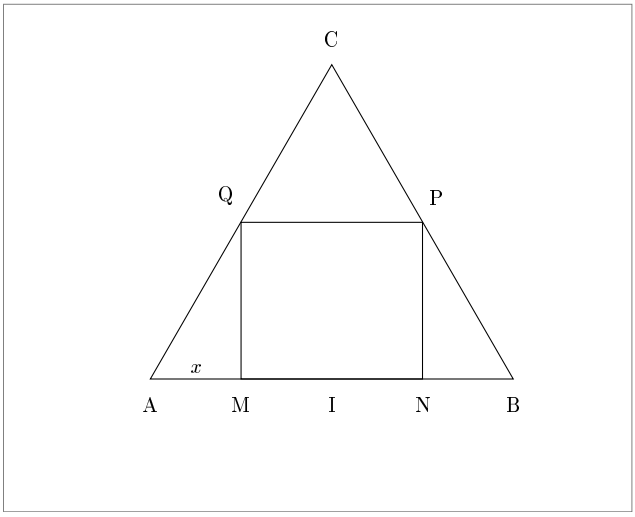
   Exprimer alors en fonction de x l'aire $f(x)$ de W.

3. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de W est maximale.Quelle est,pour cette valeur de x,la position du point I sur le segment $[EF]$?.

9 Sujet 9: Aire maximale d'un rectangle inscrit dans un triangle

Épreuve pratique	Sujet 9	Aire maximale

On considère un triangle équilatéral ABC de côté 10.On note I le milieu du segment $[AB]$.
On inscrit dans ce triangle un rectangle $MNPQ$ (voir la figure ci-dessous). On pose $x = AM$.



Partie TICE

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ,faîtes la figure.

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction

2. Afficher la distance AM ainsi que l'aire du rectangle $MNPQ$.

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction

3. En faisant varier M,conjecturer sa position sur $[AB]$ pour que l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale.

   Appeler l'examinateur pour valider votre construction et votre conjecture

Travail à rendre sur copie

1. Déterminez en fonction de x l'aire du rectangle $MNPQ$.
2. Déterminez alors pour quelle valeur de x l'aire de $MNPQ$ est maximale.

10 Grille d'évaluation

NOM:	**Prénom:**	**Classe:**
Examinateur:	**Date:**	**Heure:**

Sujet N°	**Note sur 20:**

Recommandations générales:

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences.Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante: La capacité à expérimenter(qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la facultéde proposer des conjectures)doit représenter les trois quarts de la note finale. La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement prise en compte de façon substantielle. Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maîtrisée pour être considérée comme acquise.

Compétences évaluées	**Éléments permettant de situer l'élève** (à remplir par l'examinateur)
L'élève est capable de représenter la situation (figure dynamique,feuille de calcul,courbe,.)à l'aide des TICE. L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral	
L'élève est capable d'expérimenter,de faire des essais..Il utilise de façon pertinente la calculatrice ou les outils informatiques..Il est capable d'émettre une conjecture en **cohérence** avec ses essais. L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral	
Suite à un éventuel questionnement oral,l'élève est capable d'affiner ses explorations en utilisant pertinnement les TICE Il fait preuve d'esprit critique avec un retour éventuel sur sa conjecture.L'élève tire profit des indications éventuelles données à l'oral	
L'élève montre un certain nombre de connaissances,de savoir faire mathématiques sur le sujet	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice et il est capable d'émettre un retour critique sur ses observations.	

Remarques Complémentaires: