Section plane d'un tétraèdre, optimisation d'une distance

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j},\,\overrightarrow{k})$, on définit les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,\,0,\,1)$ et le point I milieu du segment $[AB]$.

Partie expérimentale

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace, représenter le tétraèdre $OABC$ et le point I.
   (b) Pour un point M du segment $[AC]$, on définit le plan $\mathscr{P}$ passant par le point I et orthogonal à la doite (IM). Tracer la section du tétraèdre $OABC$ par le plan $\mathscr{P}$.
   (c) Le plan $\mathscr{P}$ coupe la droite (OB) en un point N. Construire le point N et tracer le segment $[MN]$.

Appeler l'examinateur pour lui présenter la figure construite.

2. Étudier à l'aide du logiciel, les variations de la longueur MN et conjecturer la position du point M, sur le segment $[AC]$, telle que cette longueur soit minimale. Quelle est, d'après le logiciel, cette longueur minimale ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter les observations faites et les résultats obtenus.

Démonstration

On définit le réel $t = \dfrac{AM}{AC}$ et on admet que les coordonnées des points M et N sont respectivement $M(1-t,0,t)$ et $N(0,t,0)$.

3. Calculer la longueur MN en fonction de t.

Appeler l'examinateur pour lui expliquer la méthode prévue pour déterminer le minimum de cette longueur.

4. Déterminer la valeur de t pour laquelle cette longueur est minimale.
5. Donner la valeur minimale prise par la longueur MN.

Production demandée

– Réalisation d'une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ;
– Présentation orale, à partir de l'écran, des conjectures ;
– Solution argumentée de la question 4.
