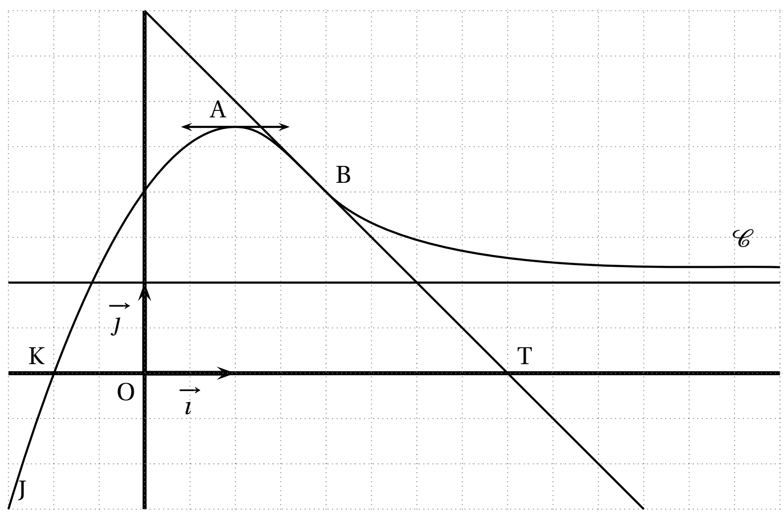
Baccalauréat ES Antilles-Guyane septembre 2005

Exercice 1 **5 points**

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\left[-\dfrac{3}{2}~;~+\infty\right[$.

- Les points $\text{J}\left(-\dfrac{3}{2}~;~-\dfrac{3}{2}\right)$, K$(-1~;~0)$, A$(1~;~\text{e})$ et B$(2~;~2)$ sont des points de $\mathscr{C}$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en B passe par T$(4~;~0)$.
- La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}~;~1\right[$ et strictement décroissante sur $[1~;~+\infty[$.



1. **a.** Donner les valeurs de $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.

   b. Donner, en justifiant vos réponses., les nombres $f'(1)$ et $f'(2)$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$ et Γ sa représentation graphique.

   a. Déterminer l'intervalle I de définition de g. Calculer les limites de g en -1 et en $+\infty$.
   En déduire les asymptotes à la courbe Γ en précisant une équation pour chacune d'elles.

   b. Exprimer $g'(x)$ à l'aide de $f(x)$ et $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de g.

   c. Déterminer $g(2)$ et $g'(2)$, puis une équation de la tangente à Γ au point B$'$ d'abscisse 2.

Exercice 2 **5 points**

Dans cet exercice, A et B étant des évènements, $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement A, $P(A)$ la probabilité de A et $P_B(A)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé.

Une entreprise fabrique des appareils en grand nombre. Une étude statistique a permis de constater que 10 % des appareils fabriqués sont défectueux.
L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de ces appareils avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 80 % des appareils défectueux, mais il élimine également à tort 10 % des appareils non défectueux. Les appareils non éliminés sont alors mis en vente.

On prend au hasard un appareil fabriqué et on note D l'évènement « l'appareil est défectueux » et V l'évènement « l'appareil est mis en vente ».

1. Construire un arbre pondéré rendant compte de cette situation.
2. **a.** Calculer $P(\text{V} \cap \text{D})$ et $P\left(\text{V} \cap \overline{\text{D}}\right)$.
   En déduire que la probabilité qu'un appareil fabriqué soit mis en vente après contrôle est 0,83.

   b. Calculer la probabilité qu'un appareil mis en vente après contrôle soit défectueux.

   c. Vérifier que $P_{\text{V}}(\text{D}) \approx 0.24 \times P(\text{D})$.
   Rédiger une phrase comparant les probabilités pour un acheteur d'acquérir un appareil défectueux suivant que l'entreprise applique ou non le test de contrôle.
3. Une entreprise décide d'appliquer le contrôle, tout en continuant à fabriquer le même nombre d'appareils. Elle fabriquait et vendait une quantité q_0 d'appareils au prix p_0.
   Les pourcentages demandés seront arrondis à l'unité.

   a. Quelle est, en fonction de q_0 la nouvelle quantité q_1 d'appareils mis en vente après contrôle ?

   b. De quel pourcentage la quantité vendue a-t-elle diminué ?

   c. Quel doit être le nouveau prix p_1 (en fonction de p_0 pour que l'entreprise maintienne son chiffre d'affaires ?
   Quel est alors le pourcentage d'augmentation du prix de vente ?

EXERCICE 3 — 10 points

Un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. La quantité q_i présente dans le sang (q_i en milligrammes) à l'instant t_i (t_i, en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures .

t_i (heures)	0	2	4	6	8
q_i (mg)	9,9	7,5	5,5	3,9	3

PARTIE A
Modélisation par une fonction affine
Le nuage de points associé à la série $\left(t_i\ ;\ q_i\right)$ est représenté dans le repère orthogonal ci-dessous.

1. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement affine de q en t par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2}) ; tracer la droite D sur la figure 1.
2. En supposant que ce modèle reste valable pendant 12 heures, quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures ? Qu'en pensez-vous ?

PARTIE B Recherche d'un modéle mieux adapté

1. Représenter dans le repère semi-logarithmique ci-dessous le nuage de point associé à la série $\left(t_i\ ;\ q_i\right)$.
   Quel type d'ajustement l'allure de cette représentation permet-elle d'envisager ?
2. On pose $y_i = \ln q_i$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous (valeurs arrondies au centième).

t_i (heures)	0	2	4	6	8
y_i (mg)					

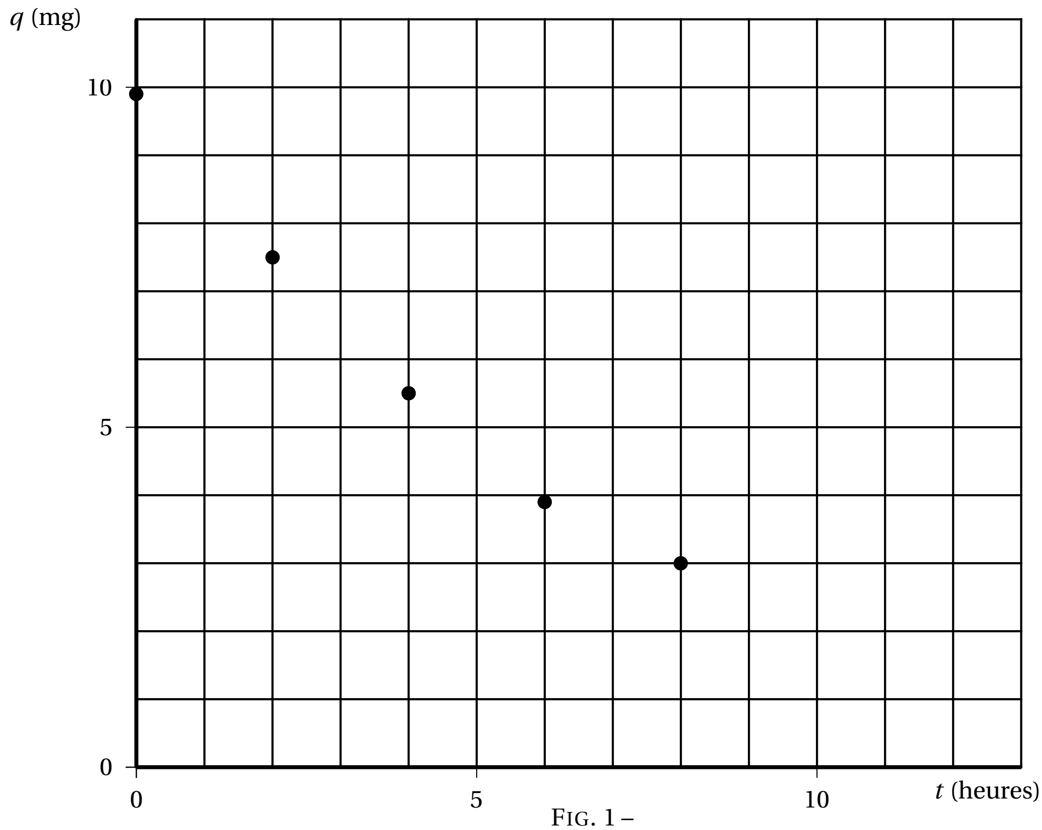


FIG. 1 –

3. Déterminer à l'aide de la calculatrice une équation de la droite d'ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis au centième).
4. Montrer que l'expression de q en fonction de t obtenue à partir de cet ajustement est de la forme $q = a\mathrm{e}^{-bt}$ où a est arrondi à l'unité et b au centième.
5. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0\,;\,15]$ par :

$$f(t) = 10\mathrm{e}^{-0,15t}.$$

   Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ sur la figure 1.
6. On suppose que ce nouveau modèle reste valable pendant 12 heures. Calculer à 10^{-1} près la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures. Placer le point correspondant sur le graphique.

PARTIE C

1. Calculer $\dfrac{f(t+1)-f(t)}{f(t)}$. Interpréter le résultat par une phrase concernant le pourcentage de variation de la quantité de médicament présente dans le sang.
2. Le médicament reste efficace tant que la quantité présente dans le sang reste supérieure à 2 mg.
   Déterminer graphiquement, à 1 heure près par défaut, la durée d'efficacité de l'injection.
3. Calculer, à un dixième de milligramme près, la quantité moyenne de médicament présente dans le sang pendant les 10 heures qui suivent l'injection.

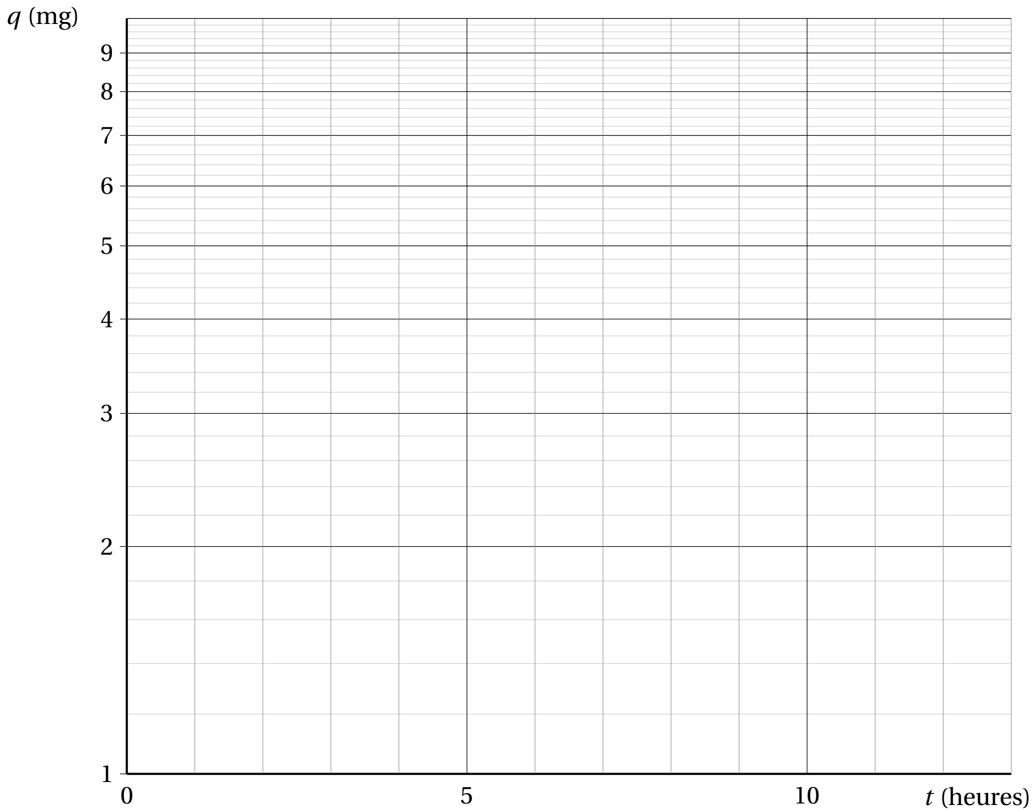


FIG. 2 –

EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement de spécialité

Sur un marché où seul un produit A était présent, un nouveau produit B est mis en vente à partir de l'année 2003. Une enquête a montré que :

- la probabilité qu'un client de A, une année donnée, reste fidèle à A l'année suivante est 0,67 ;
- la probabilité qu'un client de B, une année donnée, choisisse A l'année suivante est 0,27.

On suppose que la clientèle totale pour les deux produits ne change pas. On prend un client au hasard l'année $(2002+n)$.

Notations :

- On appelle A l'état « acheter le produit A » ;
- On appelle B l'état « acheter le produit B » ;
- On note a_n la probabilité que ce client achète A pendant l'année $(2002+n)$.
- On note b_n la probabilité que ce client achète B pendant l'année $(2002+n)$.
- On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.
La matrice M de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets du graphe dans l'ordre A puis B, est donc :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,27 & 0,73 \end{pmatrix}$$

2. On appelle $\mathrm{P}_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice décrivant l'état probabiliste de la clientèle l'année $(2002+n)$

a. Donner la relation matricielle liant l'état P_1 à l'état P_0. Calculer P_1 et traduire ce résultat par une phrase.

b. Calculer et traduire de même l'état P_2.

3. **a.** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n. En déduite que, pour tout entier n, on a :

$$a_{n+1} = 0,67a_n + 0,27b_n \quad \text{puis} \quad a_{n+1} = 0,4a_n + 0,27.$$

b. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0,45$ pour tout entier n. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

c. Exprimer u_n puis a_n et b_n en fonction de n.

4. **a.** Quelles sont les limites respectives a et b des suites (a_n) et (b_n). Exprimer ces résultats en termes de répartition sur le marché des produits A et B.

b. On pose P= $(a \quad b)$.
Vérifier que P = P × M.
Que représente l'état P ? Dépend-il de l'état initial P_0 ?