**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat ES France septembre 2005

EXERCICE 1 **3 points**

**Commun à tous les candidats**

Une enquête menée pour le compte d'une entreprise a permis d'établir le nombre d'acheteurs d'un produit X selon le montant de son prix de vente. Les résultats de l'enquête sont résumés dans le tableau ci-dessous dans lequel :

- $x_i$ désigne le prix de vente unitaire (en euros) du produit X ;
- $y_i$ le nombre d'acheteurs en milliers.

| $x_i$ | 1 | 1,50 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3,75 | 2,8 | 2 | 1 | 0,5 |

**1.** Représenter sur votre copie le nuage de points associé à la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan (unités graphiques : 4 cm pour 1 euro en abscisse et 2 cm pour 1 000 acheteurs en ordonnée).

**2.** On recherche un ajustement affine de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.

**a.** Donner l'équation de la droite d'ajustement de $y$ en $x$ obtenue par la méthode des moindres carrés.
*Les calculs seront faits à la calculatrice et les valeurs cherchées seront arrondies au centième ; on ne demande aucune justification.*

**b.** Tracer cette droite dans le même repère que précédemment.

**c.** Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 euros.

EXERCICE 2 **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Parmi les stands de jeux d'une fête de village, les organisateurs ont installé une machine qui lance automatiquement une bille d'acier lorsque le joueur actionne un bouton.
Cette bille roule sur un plan comportant une cible circulaire évidée en son centre.
Lorsque la bille atteint la cible, soit elle est avalée, soit elle reste sur la cible.
Lorsque la bille n'atteint pas la cible elle revient à son point de départ.
Dans la suite de l'exercice, on notera :

- C l'évènement « la cible est atteinte » ;
- B l'évènement « la bille est avalée ».

Une étude préliminaire a démontré que :
- la probabilité d'atteindre la cible lors d'un lancer est égale à 0,3 ;
- lorsque la cible a été atteinte, la probabilité que la bille soit avalée est égale à 0,2.

**1.** Traduire la situation aléatoire ci-dessus par un arbre de probabilité.

**2.** On actionne le bouton.

**a.** Calculer la probabilité $P_1$ que la bille soit avalée.

**b.** Calculer la probabilité $P_2$ qu'elle reste sur la cible.

Une partie se déroule selon la règle ci-dessous. Pour jouer, on paie 0,50 euro et on actionne le bouton qui lance la bille :

- si la bille est avalée, on gagne un lot d'une valeur de $g$ euros ;
- si la bille reste sur la cible sans être avalée, on est remboursé ;
- si la bille rate la cible, on perd la mise.

3. Déterminer complètement la loi de probabilité de gain d'un joueur : on recopiera et on complétera le tableau ci-dessous ; aucune justification n'est demandée.

| gain | $-0,50$ | 0 | $g-0,50$ |
|---|---|---|---|
| probabilité | | | |

4. **a.** Montrer que l'espérance de gain d'un joueur en fonction de $g$ est :

$$\mathrm{E} = 0,06g - 0,38.$$

**b.** On prévoit qu'un grand nombre de parties seront jouées. Pour quelles valeurs de $g$ les organisateurs peuvent-ils espérer un bénéfice ?

EXERCICE 2 **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Mademoiselle Z travaille dans une société spécialisée dans la vente par téléphone. Chaque jour, elle doit appeler une liste de clients pour leur proposer un produit particulier. Après avoir observé un grand nombre d'appels de Mademoiselle Z, on peut faire l'hypothèse suivante :

- si un client contacté répond favorablement (situation A), cela donne de l'assurance à Mademoiselle Z et elle arrive à convaincre le client suivant une fois sur deux ;
- si le client contacté ne répond pas favorablement (situation B), Mademoiselle Z se décourage et n'arrive à convaincre le client suivant qu'une fois sur cinq.

1. **a.** Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

   **b.** Écrire la matrice de transition $M$ de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2. Ce lundi, Mademoiselle Z est en forme et elle a convaincu le premier client d'acheter le produit proposé. La matrice ligne décrivant l'état initial au premier appel est donc $P_0 = (1\ ;\ 0)$. Donner la matrice ligne $P_1$ exprimant l'état probabiliste au deuxième appel.

3. On donne la matrice $M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}287\ 45 & 0{,}712\ 55 \\ 0{,}285\ 02 & 0{,}714\ 98 \end{pmatrix}$

   **a.** Calculer le produit $P_0 M^5$. En déduire la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client ce lundi.

   **b.** Quelle aurait été la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client si elle n'avait pas convaincu le premier ?

4. Déterminer l'état stable du système. Comment peut-on l'interpréter ?

EXERCICE 3 **8 points**

**Commun à tous les candidats**

**PARTIE A**

L'objet de cet exercice est l'étude de deux fonctions intervenant dans un modèle économique. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ donnée en **ANNEXE (à rendre avec la copie)** est la représentation graphique, dans un repère orthogonal du plan, de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-0,7x+2,1}.$$

De même, la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ est la représentation graphique de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par :

$$g(x) = 0,5x + 0,7.$$

On admet que les fonctions $f$ et $g$ sont dérivables sur l'intervalle $[0\,;5]$.

1. On appelle $h$ la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.

**a.** Calculer $h'(x)$ où $h'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $h$ sur l'intervalle $[0\,;5]$.

**b.** Étudier le signe de $h'(x)$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;5]$. En déduire que la fonction $h$ est strictement monotone sur cet intervalle.

**c.** Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle $[0\,;5]$ et donner à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près (on ne demande pas de justification sur la méthode d'obtention de cette valeur).

**d.** Déduire de l'étude précédente les valeurs arrondies à $10^{-2}$ des coordonnées du point d'intersection F de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $\left(\mathscr{C}_g\right)$.

**2.** Dans la suite du problème, on prendra $\alpha = 2,17$ et $f(\alpha) = g(\alpha) = 1,79$.

**a.** Soient les points $\text{C}(0\ ;\ f(\alpha))$ et $\text{E}(\alpha\ ;\ 0)$. Donner une valeur arrondie à $10^{-2}$ de l'aire du rectangle OCFE exprimée en unités d'aire.

**b.** Interpréter graphiquement le nombre $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\text{d}x$.

**c.** Calculer $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\text{d}x$ en fonction de $\alpha$ et en donner la valeur arrondie à $10^{-2}$.

**PARTIE B**

La fonction $f$ définie dans la **PARTIE A** représente la fonction de demande d'un produit ; elle met en correspondance le prix $f(x)$ exprimé en milliers d'euros et la quantité $x$, exprimée en tonnes, que sont prêts à acheter les consommateurs à ce prix.

La fonction $g$ définie dans la **PARTIE A** est la fonction d'offre de ce produit ; elle met en correspondance le prix $g(x)$ exprimé en milliers d'euros et la quantité $x$, exprimée en tonnes, que sont prêts à vendre à ce prix les producteurs.

On appelle prix d'équilibre du marché le prix pour lequel la quantité demandée par les consommateurs est égale à celle offerte par les producteurs. On note $p_0$ le prix d'équilibre et $q_0$ la quantité échangée sur le marché à ce prix. Dans la situation étudiée on a donc : $f\left(q_0\right) = g\left(q_0\right)$.

**1.** Déduire des résultats donnés dans la **PARTIE A** les valeurs de $q_0$ et de $p_0$.

**2.** Tous les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher (au-dessus du prix $p_0$) réalisent une économie. Le montant économisé par les consommateurs, appelé surplus des consommateurs, vaut par définition $\displaystyle\int_0^{q_0} f(x)\,\text{d}x - p_0 \times q_0$. Il s'exprime ici en milliers d'euros.

**a.** Sur le graphique de la feuille **ANNEXE (à rendre avec la copie)** :
- indiquer les valeurs $q_0$ et $p_0$ sur les axes de coordonnées ;
- hachurer le domaine dont l'aire s'écrit :

$$\int_0^{q_0} f(x)\,\text{d}x - p_0 \times q_0.$$

**b.** Calculer, en milliers d'euros, le surplus des consommateurs.

**EXERCICE 4** **4 points**

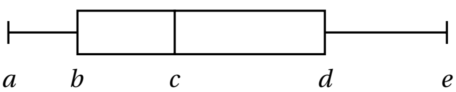
**Commun à tous les candidats**

**À rendre avec la copie**

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule réponse est exacte. On demande de cocher cette réponse.

*Une bonne réponse rapporte* 0,5 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enl ve aucun point.*

*Si le total des points est négatif la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

| QUESTIONS | RÉPONSES |
|---|---|
| **1.** La courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet pour tangente au point d'abscisse 1, la droite d'équation : | ☐ $y = x+1$<br>☐ $y = x-1$<br>☐ $y = x+\mathrm{e}$ |
| **2.** La représentation graphique de la fonction exponentielle admet pour asymptote : | ☐ la droite d'équation $y = x$<br>☐ l'axe des abscisses<br>☐ l'axe des ordonnées |
| **3.** La fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + \ln(2x+4)$ est une primitive sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par : | ☐ $g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2}{x+2}$<br>☐ $g(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{x+2}$<br>☐ $g(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2x+4}$ |
| **4.** L'intégrale $\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$ est égale à : | ☐ $-0,5$<br>☐ 0<br>☐ 0,5 |
| **5.** La limite en $+\infty$ de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{-2x^3+3x-1}{(2x-1)^3}$ est égale à : | ☐ 1<br>☐ $-1$<br>☐ $-\frac{1}{4}$ |
| **6.** Le diagramme en boîte ci-dessous résume une série statistique dont la médiane est :   | ☐ $\frac{1}{2}(a+e)$<br>☐ $\frac{1}{2}(b+d)$<br>☐ $c$ |
| **7.** La droite des moindres carrés associée à une série statistique à deux variables passe par le point moyen du nuage : | ☐ jamais<br>☐ dans certains cas seulement<br>☐ toujours |
| **8.** Selon l'INSEE les prix à la consommation ont augmenté de 8,9 % du 1^er^ janvier 1998 au 31 décembre 2003.<br>Si le taux d'évolution des prix d'une année à la suivante était fixe de 1998 à 2003, et égal à $t$ %, la valeur de $t$ arrondie à $10^{-2}$ qui donnerait la même augmentation des prix à la fin de l'année 2003, serait égale à : | ☐ 1,48 %<br>☐ 1,72 %<br>☐ 1,43 % |

**ANNEXE**

**Exercice 3**

**Commun à tous les candidats**

**À rendre avec la copie**

**Figure à compléter**