Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2005

Exercice 1 **6 points**

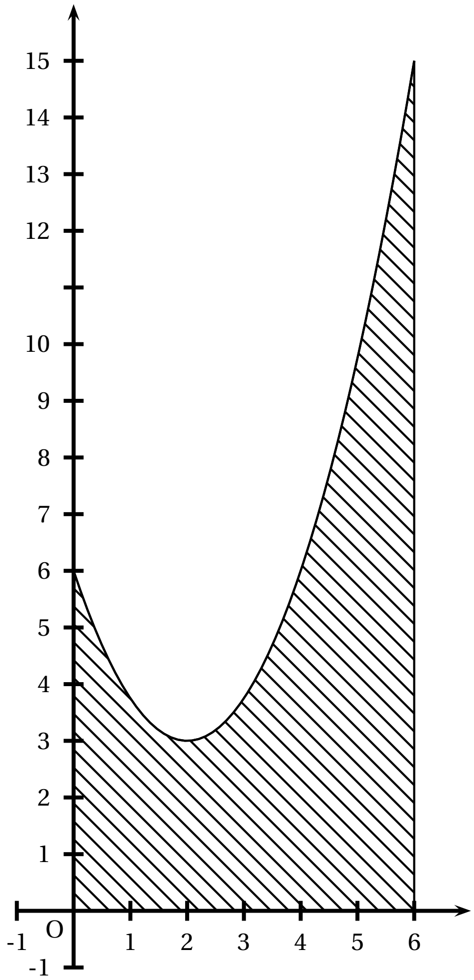
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 6] par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$$

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan d'origine O.

La partie hachurée ci-contre est limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonn ées et la droite d' équation $x = 6$.



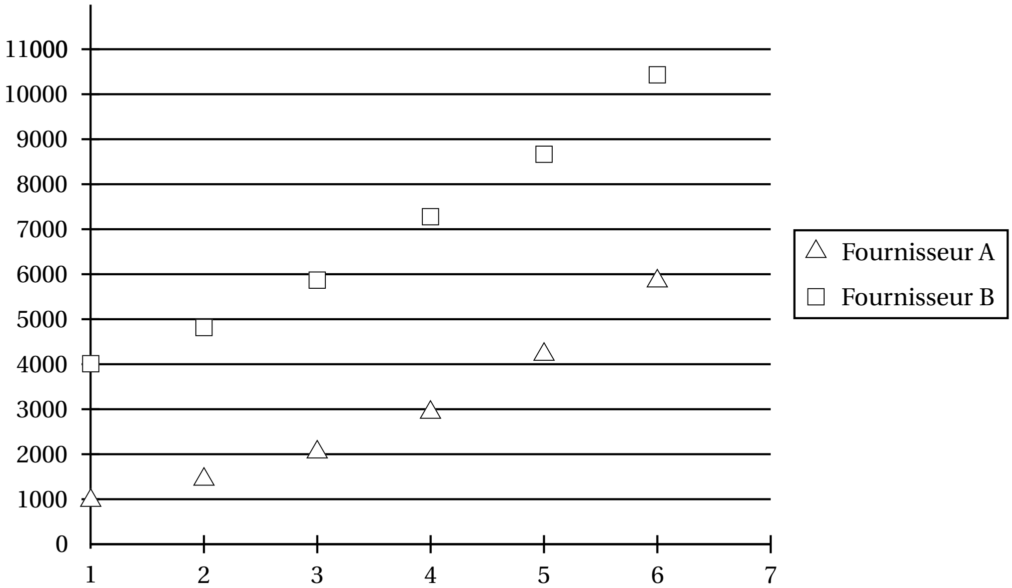
1. Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée.
2. On considère un point M appartenant à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x avec $x \in [0 ; 6]$.
   La parallè le à l'axe des ordonn ées passant par M coupe l'axe des abscisses en un point H.
   La parallè le à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonn ées en un point K.
   On appelle $R(x)$ l'aire, en unit és d'aire, du rectangle OHMK.
   Prouver que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 6], $R(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$.
3. On se propose de rechercher toutes les valeurs possibles de x de l'intervalle [0 ; 6] telles que l'aire $R(x)$ du rectangle OHMK soit égale à l'aire hachur ée S.
   a. Montrer que le problème pr éc édent revient à résoudre l' équation $g(x) = 0$ où g est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 6] par :
   $$g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36.$$
   b. Étudier les variations de g sur l'intervalle [0 ; 6] et dresser le tableau de variation de g. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle [0 ; 6] une solution unique α.
   Donner une valeur approchée de α au centième.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de sp écialit é

Dans une ville, deux fournisseurs d'accès au r éseau internet sont en concurrence.
Pour étudier l'évolution du nombre d'abonnés à ces deux fournisseurs A et B, on a reporté dans le tableau suivant, à la fin de chaque année, le nombre total d'abonnés d éclaré par chacun des deux fournisseurs.

Ann ée	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'ann ée	1	2	3	4	5	6
Nombre total y_i d'abonnés par le fournisseur A	975	1443	2049	2930	4220	5850
Nombre total t_i d'abonnés par le fournisseur B	4012	4813	5872	7281	8664	10432



1. Recopier les deux dernières lignes du tableau suivant en les complétant.
On détaillera chacun des quatre calculs et on arrondira les résultats à l'entier le plus proche.

	Augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004	Pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004	Pourcentage **annuel moyen** d'augmentation du nombre d'abonn és entre 1999 et 2004
Fournisseur A	...	500 %	...%
Fournisseur B	6 420	...%	...%

2. **a.** L'allure du nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $Y_i = \ln(y_i)$.
Écrire une équation de la droite (d) d'ajustement de Y en x par la méthode des moindres carrés.
Les calculs seront faits avec la calculatrice (sans justification) et les résultats finaux seront arrondis au millième.

b. En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre d'abonnés au fournisseur A en 2006.

3. L'allure du nuage de points associ é à la s érie statistique $(x_i\ ;\ t_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel.
En posant $T_i = \ln(t_i)$, on obtient, par la méthode des moindre carrés, une équation de la droite (Δ) d'ajustement de T en x sous la forme : $T = 0,193x + 8,102$ (ce r ésultat est admis).

En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre d'abonnés au fournisseur B en 2006.

4. En supposant que les ajustements pr éc édents restent pertinents, pr éciser l'ann ée à partir de laquelle le nombre d'abonn és au fournisseur A d épassera le nombre d'abonn és au fournisseur B.
Justifier.

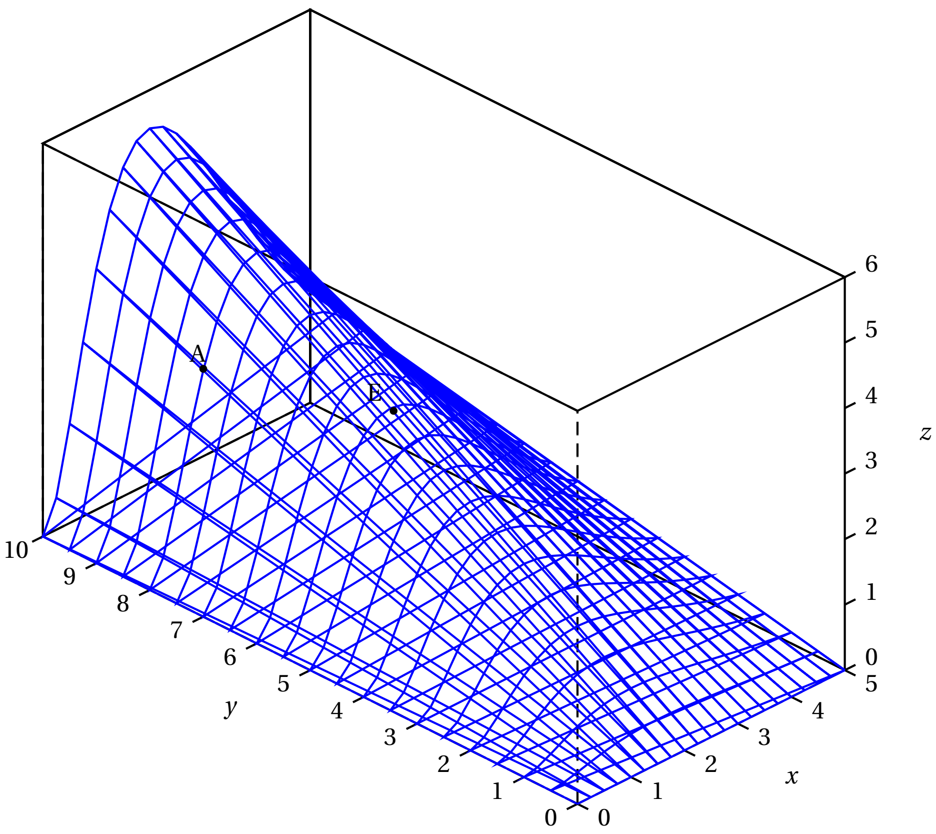
EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialit é

Le b én éfice B d'une entreprise dépend à la fois des investissements et de la production.

On appelle x le montant des investissements en millions d'euros et y la quantité produite en milliers d'unités. On admet que le bénéfice B de cette entreprise, exprimé en millions d'euros, est modélisé par la fonction B définie par $B(x\ ;\ y) = x^2 y\mathrm{e}^{-x}$.

Voici une vue de la surface (S) d' équation $z = x^2 y\mathrm{e}^{-x}$, avec x élément de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ et y élément de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$, dans un repère orthogonal de l'espace.



1. Déterminer par lecture graphique le montant des investissements et la valeur de la production qui permettent d'obtenir un b én éfice maximal quand x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ et y appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$. Calculer la valeur correspondante de ce bénéfice.
2. **a.** Sur la figure ci-dessus, on a placé le point A appartenant à la surface (S), ayant pour abscisse $x_A = 1$ et pour ordonnée $y_A = 8$. Calculer la troisième coordonnée z_A du point A.

   b. Sur la figure ci-dessus, on a placé le point E appartenant à la surface (S), ayant pour abscisse $x_E = 2$ et pour troisième coordonnée $z_E = z_A$. Calculer la valeur exacte y_E de l'ordonnée du point E.

3. Quelle est la nature de l'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $x = 1$? Justifier.
Tracer cette intersection dans un plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, y appartenant à l'intervalle $[0~;~10]$. Déterminer, à l'euro près, le montant en euros du bénéfice maximal réalisé par l'entreprise quand le montant des investissements est fixé à 1 million d'euros.

4. D éterminer une équation de la courbe d'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $y = 10$. Expliquer alors comment retrouver le résultat de la question 1.

EXERCICE 3 **9 points**

Commun à tous les candidats

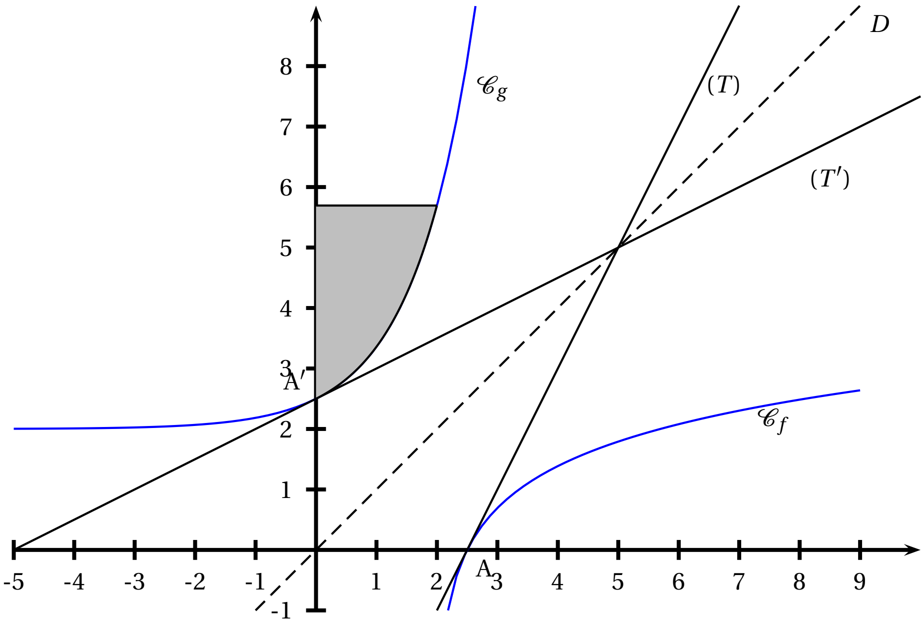
On considè re la fonction f définie sur l'intervalle $]2~;~+\infty[$ par : $f(x) = \ln(2x-4)$. On appelle $(\mathscr{C}_f)$ la courbe tracée ci-dessous, représentative de f dans un repère orthonormal.

1. **a.** D éterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

b. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]2~;~+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

c. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses au point A. Quelles sont les coordonn ées exactes de A ?

d. D éterminer une équation de la droite (T) tangente en A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.



2. Sur la figure ci-dessus, on a trac é la courbe $(\mathscr{C}_f)$, le point A, la droite (T) et la droite (D) d' équation $y = x$. Par la sym étrie axiale d'axe (D), la courbe $(\mathscr{C}_f)$ se transforme en une courbe $(\mathscr{C}_g)$ repr ésentative d'une fonction g définie dans $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout x réel, $g(x)$ s'écrit sous la forme $g(x) = a + be^x$ où a et b sont deux nombres réels. La courbe $(\mathscr{C}_g)$ ainsi construite passe par le point A' image de A par la sym étrie d'axe (D). De plus, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ admet au point A' une tangente (T') qui est l'image de la droite (T) par la sym étrie d'axe (D).

a. Donner, sans justification, le coefficient directeur de la droite (T').

b. Calculer a et b en justifiant soigneusement les calculs.

c. Calculer l'ordonnée exacte du point E appartenant à $(\mathscr{C}_g)$ et ayant pour abscisse 2.

d. Quelles sont les coordonnées du point E' image de E par la symétrie d'axe (D) ?

3. **a.** Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 \left(2+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, du domaine hachuré défini par la courbe $(\mathscr{C}_g)$, l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par E. On demande la valeur exacte du résultat.

c. Expliquer comment on peut en déduire, sans faire de calculs, la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{5}{2}}^{2+\frac{1}{2}\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.