

**EXERCICE 1**

**3 points**

**Commun à tous les candidats**

**Questionnaire à choix multiples**

*Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. On demande d'indiquer la ppnse exacte en cochant sans justification la grille réponse jointe en annexe à rendre avec la copie. Une bonne réponse rapporté 0,5 point ; une mauvaise réponse enlève 0,25 point ; l'absence de réponse donne 0 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée est 0.*

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $] - 5 ; +\infty[$  dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

$x$	-5	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	-3		4		$-\infty$
	$-\infty$	-5	$-\infty$	-4.5	$-\infty$

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

1. Sur l'intervalle  $] - 5 ; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = -2$ 
  - admet une seule solution
  - admet deux solutions
  - admet quatre solutions.
2. Sur l'intervalle  $] - 5 ; +\infty[$  la courbe  $\mathcal{C}$  :
  - admet une seule asymptote la droite d'équation  $x = -5$
  - admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations  $x = -4,5$  et  $y = -5$
  - admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations  $y = -4,5$  et  $x = -5$ .
3. On sait que  $f'(2) = 0$ . L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 2 est :
  - $y = 4$
  - $y = 4(x - 2)$
  - $x = 4$ .
4. On sait que l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point de coordonnées (1 ; 2) est  $y = 3x - 1$ . On a :
  - $f(2) = 1$
  - $f'(1) = -1$
  - $f'(1) = 3$ .
5. Sur l'intervalle  $]2 ; +\infty[$ , la fonction  $g$  définie par  $g(x) = e^{-f(x)}$ 
  - est croissante
  - est décroissante
  - n'est pas monotone.
6. On pose  $h(x) = \ln [f(x) + 5]$ . Alors la fonction  $h$  :
  - est décroissante sur  $]2 ; +\infty[$ ;
  - est positive sur  $]2 ; +\infty[$
  - n'est pas définie sur  $]2 ; +\infty[$ .

## EXERCICE 2

5 points

**Pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité**Les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$  près.

Un musée très fréquenté propose à la vente trois sortes de billets :

- au prix de 5 € un billet pour visiter uniquement le fonds permanent des collections ;
- au prix de 3 € un billet pour visiter uniquement une exposition temporaire ;
- au prix de 6 € un billet pour visiter le fonds permanent et l'exposition temporaire.

On sait que :

- 85 % des visiteurs visitent le fonds permanent
- 35 % des visiteurs visitent l'exposition temporaire.

Un visiteur se présente à l'entrée du musée et achète un billet. On considère les événements suivants : F : « Le visiteur achète un billet à 5 € » E : « Le visiteur achète un billet à 3 € » M : « Le visiteur achète un billet à 6 € ».

1. a. Établir que  $p(M) = 0,2$  ;  $p(F) = 0,65$  et  $p(E) = 0,15$ .  
b. Calculer le prix de vente moyen d'un billet.

Le musée propose à la vente un catalogue sur l'exposition temporaire.

On sait que :

- 35 % des personnes qui ne visitent que l'exposition temporaire achètent le catalogue.
- 25 % des personnes qui visitent le fonds permanent et l'exposition temporaire achètent le catalogue.
- 97 % des visiteurs du seul fonds permanent n'achètent pas le catalogue.

On considère l'évènement C : « Le visiteur achète le catalogue »

2. Démontrer que  $p(C) = 0,122$  (on pourra s'aider d'un arbre).
3. Un visiteur a acheté le catalogue. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas visité l'exposition temporaire ?
4. Quelle est la probabilité que, parmi trois visiteurs du musée venus indépendamment les uns des autres, au moins un n'ait pas acheté le catalogue ?

## EXERCICE 2

5 points

**Pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité**

Les questions 1. et 2. peuvent être traitées de façon indépendante.

1. Dans une région, on considère trois types de temps : beau, variable, pluvieux.

On sait que :

- S'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est  $\frac{1}{3}$  et la probabilité qu'il pleuve est  $\frac{1}{6}$
- Si le temps est variable, la probabilité qu'il soit variable le lendemain est  $\frac{1}{4}$  et la probabilité qu'il pleuve est  $\frac{1}{2}$
- S'il pleut, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est  $\frac{1}{4}$  et la probabilité qu'il fasse beau est  $\frac{1}{2}$

On note

- B : « le temps est beau » ;
- V : « le temps est variable » ;
- P : « le temps est pluvieux ».

a. Représenter la situation par un graphe probabiliste.

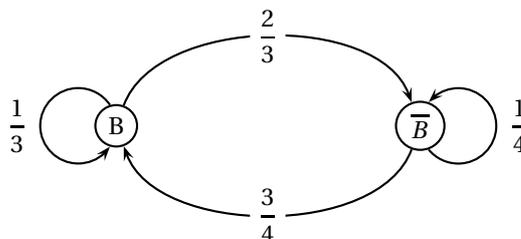
b. Donner la matrice de transition de ce graphe. Les sommets B, V, P seront rangés dans cet ordre.

c. Pour tout entier naturel  $n$ , l'état probabiliste dans  $n$  jours est défini par la matrice ligne  $P_n = (b_n \ v_n \ p_n)$  où  $b_n$  désigne la probabilité qu'il fasse beau dans  $n$  jours,  $v_n$  la probabilité que le temps soit variable dans  $n$  jours et  $p_n$  la probabilité qu'il pleuve dans  $n$  jours.

Aujourd'hui il fait beau, on a donc  $P_0(1 \ 0 \ 0)$  matrice ligne décrivant l'état initial.

Déterminer la probabilité de chaque type de temps dans 2 jours.

2. Dans une autre région, on note B : « il fait beau »  $\bar{B}$  : « il ne fait pas beau ». Les variations du temps sont représentées par le graphe suivant :



- a. Donner la matrice de transition  $T$  de ce graphe.  
 b. Soit  $Q = (x \ y)$  avec  $x + y = 1$ .  
 Déterminer  $x$  et  $y$  tels que  $Q = QT$  et interpréter le résultat.

### EXERCICE 3

6 points

Commun à tous les candidats

On désigne par  $f$  la fonction définie sur  $]0; 5]$  par

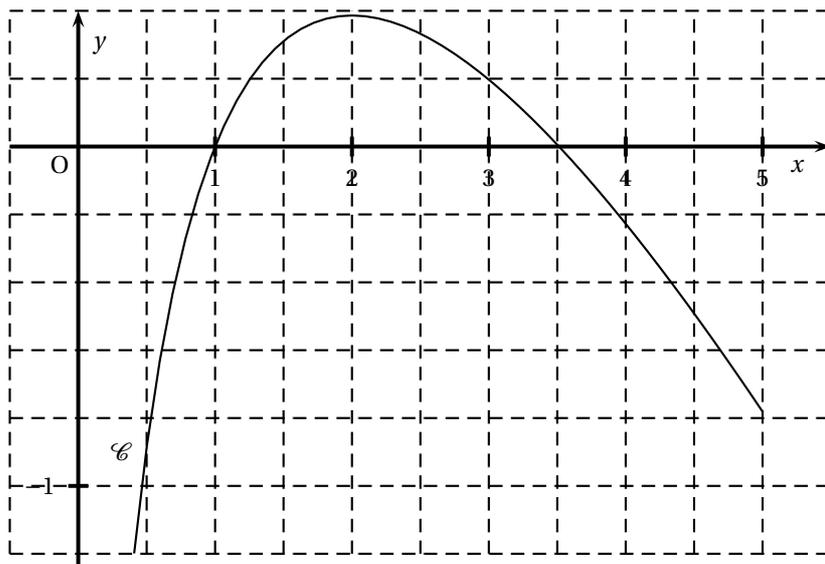
$$f(x) = 1 - x + 2 \ln x.$$

La courbe  $\mathcal{C}$  donnée ci-dessous est la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer la limite de  $f$  en 0.
2. Calculer  $f'(x)$  et étudier les variations de  $f$ .  
Dresser le tableau des variations de  $f$ .
3.
  - a. Calculer  $f(1)$ .
  - b. Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur  $]3; 4]$  une solution unique  $\alpha$  puis donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près par défaut de  $\alpha$ .
  - c. En déduire le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
4. On appelle  $g$  la fonction définie sur  $]0; 5]$  par

$$g(x) = x \left( -\frac{1}{2}x + 2 \ln x - 1 \right).$$

- a. Montrer que  $g$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; 5]$ .
- b. Sur le graphique ci-dessous, on considère le domaine limité par l'axe des abscisses et la partie de la courbe  $\mathcal{C}$  située au-dessus de cet axe. Montrer que l'aire de ce domaine est égale en unités d'aire, à  $g(\alpha) - g(1)$ .
- c. Calculer une valeur approchée de l'aire  $\mathcal{A}$  exprimée en  $\text{cm}^2$ . On utilisera la valeur approchée de  $\alpha$  trouvée au 3. b.



## EXERCICE 4

5 points

## Commun à tous les candidats

Les résultats seront arrondis à  $10^{-2}$  près

Le tableau ci-dessous donne le PIB de la Chine, en milliards de dollars, entre 1982 et 2002.

Année	1982	1986	1990	1994	1998	2002
Rang $x_i$ de l'année	0	4	8	12	16	20
PIB $y_i$	280	300	384	546	945	1232

*(Le Monde du 26/01/2004)*

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal du plan. Les unités graphiques seront de 1 cm pour deux années sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 100 milliards de dollars sur l'axe des ordonnées.
2.
  - a. Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés.
  - b. Tracer cette droite sur le graphique.
  - c. Avec cet ajustement, estimer graphiquement et par le calcul le PIB de la Chine en 2004. Commenter le résultat obtenu.
3. On envisage dans cette question un ajustement exponentiel.  
En posant  $z = \ln y$  on obtient une droite d'ajustement de  $z$  en  $x$  d'équation  $z = 0,08x + 5,46$ .
  - a. On se propose de déterminer alors  $y$  en fonction de  $x$  sous la forme  $y = \alpha e^{\beta x}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels.  
Montrer que  $y = 235,10e^{0,08x}$ .
  - b. Tracer sur le graphique la courbe d'équation  $y = 235,10e^{0,08x}$ , pour  $x \in [0 ; 24]$ .
  - c. Avec cet ajustement, estimer graphiquement et par le calcul, le PIB de la Chine en 2004.
4. Le PIB de la Chine pour 2004 était de 1 650 milliards de dollars (Source internet).  
Calculer en pourcentage par rapport à la valeur réelle, les erreurs commises en prenant comme PIB les estimations obtenues aux questions 2 et 3.

**Annexe – Document réponse à rendre avec la copie**

**Exercice 1 - Commun à tous les candidats**

Ne cocher qu'une seule réponse par question

1. Sur l'intervalle  $] -5 ; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = -2$ 
  - admet une seule solution
  - admet deux solutions
  - admet quatre solutions.
2. Sur l'intervalle  $] -5 ; +\infty[$  la courbe  $\mathcal{C}$  :
  - admet une seule asymptote la droite d'équation  $x = -5$
  - admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations  $x = -4,5$  et  $y = -5$
  - admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations  $y = -4,5$  et  $x = -5$ .
3. On sait que  $f'(2) = 0$ . L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 2 est :
  - $y = 4$
  - $y = 4(x - 2)$
  - $x = 4$ .
4. On sait que l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point de coordonnées  $(1 ; 2)$  est  $y = 3x - 1$ . On a :
  - $f(2) = 1$
  - $f'(1) = -1$
  - $f'(1) = 3$ .
5. Sur l'intervalle  $]2 ; +\infty[$ , la fonction  $g$  définie par  $g(x) = e^{-f(x)}$ 
  - est croissante
  - est décroissante
  - n'est pas monotone.
6. On pose  $h(x) = [f(x) + 5]$ . Alors la fonction  $h$  :
  - est décroissante sur  $]2 ; +\infty[$ ;
  - est positive sur  $]2 ; +\infty[$ ;
  - n'est pas définie sur  $]2 ; +\infty[$ .