Baccalauréat ES 2008

L'intégrale de septembre 2007 à juin 2008

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Durée : 4 heures

Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier la proposition qui vous semble exacte sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.

Barème : *Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

1. La fonction $F : x \longmapsto \ln(2x+4)$ est une primitive sur $[0~;~+\infty[$ de la fonction f définie par :

   - $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$
   - $f(x) = \dfrac{1}{2x+4}$
   - $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 3x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

   - $6(\mathrm{e}-1)$
   - $\dfrac{3}{2}(\mathrm{e}-1)$
   - $\dfrac{3}{2}\mathrm{e}$

3. Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x + 1$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonorrnal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 passe par le point de coordonnées :

   - $(2~;~0)$
   - $(1~;~-1)$
   - $\left(2~;~\dfrac{3}{2} - \ln 2\right)$

4. Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = 2x + \ln\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

   - $y = 0$
   - $y = 2x - \ln 2$
   - $y = 2x$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On donne ci-dessous la proportion, en pourcentage, du nombre d'enfants nés hors mariage en France métropolitaine.

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
Proportion y_i	11,4	19,6	30,1	37,6	42,6	45,2

On souhaite effectuer un ajustement de cette série statistique de la proportion en fonction de l'année.

1. **a.** Construire le nuage de points de coordonnées $(a_i,~y_i)$ dans le plan muni du repère orthogonal suivant
   – sur l'axe des abscisses, on placera 1980 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm,
   – sur l'axe des ordonnées, on placera 10 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm.

b. Un ajustement affine semble-t-il adapté ?

2. On note a l'année et y la proportion, on pose $x = a - 1950$ et $t = \ln x$.

a. Compléter sur la feuille annexe le tableau suivant :

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x_i = a_i - 1950$	30					
$t_i = \ln x_i$	3,401					
y_i	11,4					

On donnera pour t des valeurs arrondies au millième.

b. Exprimer y en fonction de t par une régression linéaire en utilisant la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au dixième.

c. En déduire la relation : $y = 61,3\ln x - 197$.

d. Quel pourcentage du nombre d'enfants nés hors mariage (arrondi à 1 %), peut-on prévoir en 2010 en utilisant cet ajustement ?

e. À partir de quelle année peut-on prévoir que la proportion du nombre d'enfants nés hors mariage sera-t-elle supérieure à 60 % ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise désire construire dans son hall d'entrée un aquarium ayant la forme d'un pavé droit de hauteur 5 dm (décimètres).
Ses deux autres dimensions, exprimées en dm, sont des entiers naturels x et y tels que

$$x \in]0\ ;\ 20[\quad \text{et} \quad y \in]0\ ;\ 20[.$$

La structure de cette construction est un bâti métallique correspondant aux 12 arêtes du pavé droit et nécessitant des réglettes d'aluminium dont le prix de revient est de $0,8$ euro le dm.
Les quatre parois verticales et le fond de cet aquarium sont construits en verre.

PARTIE A :

On décide d'investir exactement 80 euros pour la construction du bâti métallique.

1. Montrer que, pour cet investissement, les dimensions x et y sont liées par la contrainte $x + y = 20$.

2. **a.** Déterminer en fonction de x et y le volume V, exprimé en dm^3, de cet aquarium.

b. En déduire le volume V en fonction de x sous la contrainte précédente.

3. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 20[$ par $f(x) = V$.

a. Montrer que la fonction f admet un maximum sur $]0\ ;\ 20[$.

b. En déduire les dimensions de l'aquarium peur que son volume soit maximal ainsi que la valeur de ce volume maximal.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie pour tout $x \in]0\ ;\ 20[$ et tout $y \in]0\ ;\ 20[$ par :

$$g(x,\ y) = xy + 10(x + y).$$

On donne en annexe la représentation graphique de la surface d'équation $z = g(x,\ y)$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$.

1. Quelle est la nature de la section de cette surface par le plan d'équation $x = 12$, parallèle au plan $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$? Justifier la réponse.

2. Montrer que $g(x,\ y)$ représente en fonction des dimensions x et y l'aire S, exprimée en dm^2, de la surface vitrée de l'aquarium.
3. On suppose pour cette question que $x = 12$.
   a. Calculer l'aire de la surface vitrée de l'aquarium dans le cas où la contrainte de la partie A est respectée.
   b. Déterminer, à l'aide du graphique, les valeurs de y pour lesquelles l'aire est comprise entre 400 et 500 dm^2.
   c. Vérifier le résultat précédent en utilisant le résultat de la question 1.

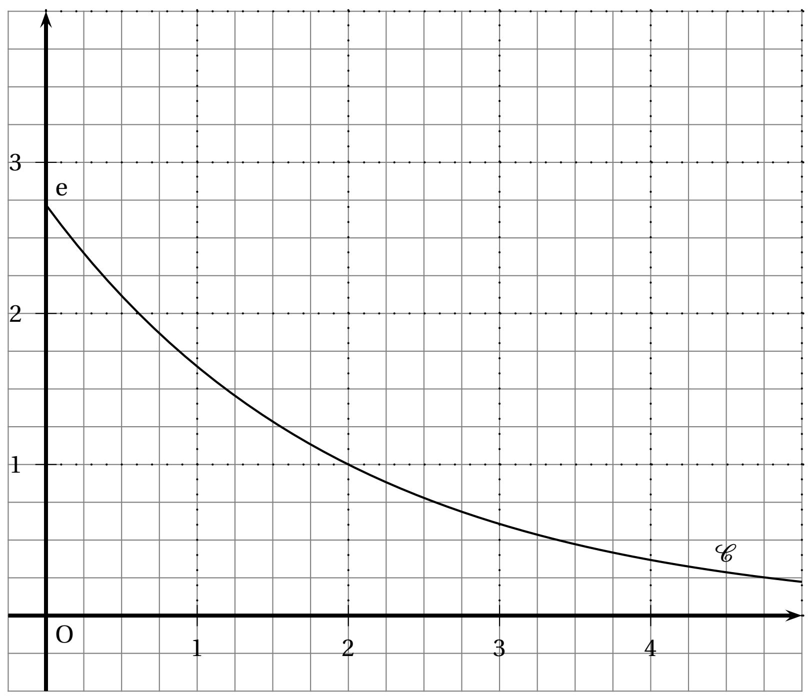
EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$$

dans un repère orthonormé du plan $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.



1. Démontrer que l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$. Tracer T sur le graphique de la feuille annexe.
2. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x - 2.$$

   a. Démontrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0~;~2]$ et croissante sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$.
   b. Calculer $g(2)$. En déduire le signe de g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. a. Hachurer sur le graphique de la feuille annexe le domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T, la droite d'équation $x = 2$ et l'axe des ordonnées.

b. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Sur son trajet quotidien qui le conduit de son domicile à son lieu de travail, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. Si, lorsqu'il parvient à leur niveau, le signal est vert, il passe, si le signal est orange ou rouge, il s'arrête.

On note :

– A_1 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au premier feu ».
– A_2 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au deuxième feu ».

On note $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ les évènements contraires des évènements A_1 et A_2.

1. Lorsque l'automobiliste se présente au premier feu, la probabilité que le signal soit orange est $\dfrac{1}{6}$, la probabilité qu'il soit rouge est $\dfrac{1}{3}$.

a. Quelle est la probabilité que l'automobiliste s'arrête au premier feu ?

b. Quelle est la probabilité qu'il passe sans s'arrêter au premier feu ?

2. Si l'automobiliste s'est arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête également au deuxième feu est $\dfrac{1}{2}$; s'il ne s'est pas arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête au deuxième feu est $\dfrac{1}{3}$.

a. Illustrer cette situation par un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité que l'automobiliste ne s'arrête pas sur son trajet est $\dfrac{1}{3}$.

c. Calculer $P\left(A_1 \cap A_2\right)$ et $P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right)$; en déduire $P\left(A_2\right)$.

d. L'automobiliste s'est arrêté au deuxième feu. Quelle est la probabilité qu'il se soit également arrêté au premier feu ?

3. Si l'automobiliste effectue le trajet sans s'arrêter, celui-ci dure neuf minutes, s'il s'arrête une fois, douze minutes, et s'il s'arrête deux fois, quinze minutes.

a. Déterminer la loi de probabilité de la durée du trajet.

b. Déterminer la durée moyenne du trajet.

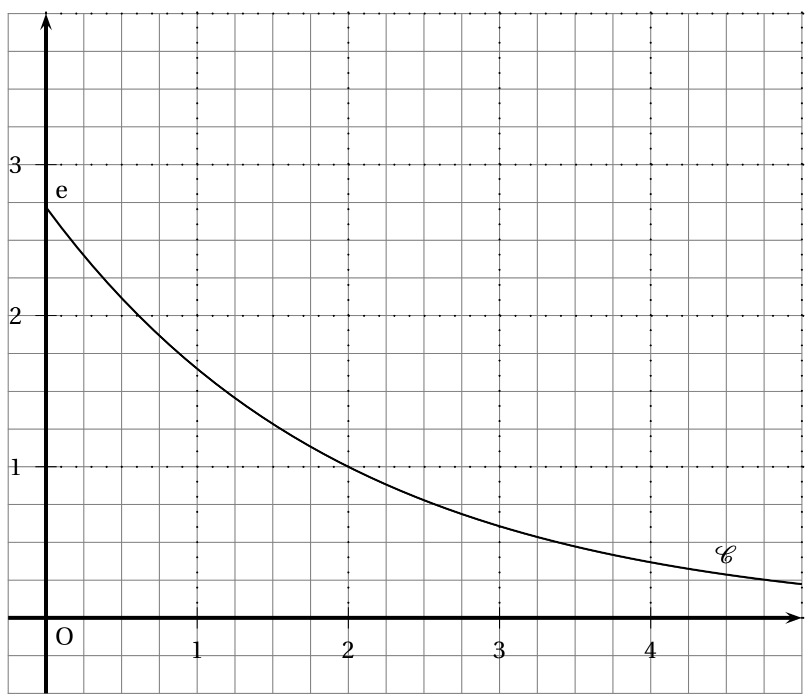
Annexes à rendre avec la copie

Enseignement obligatoire

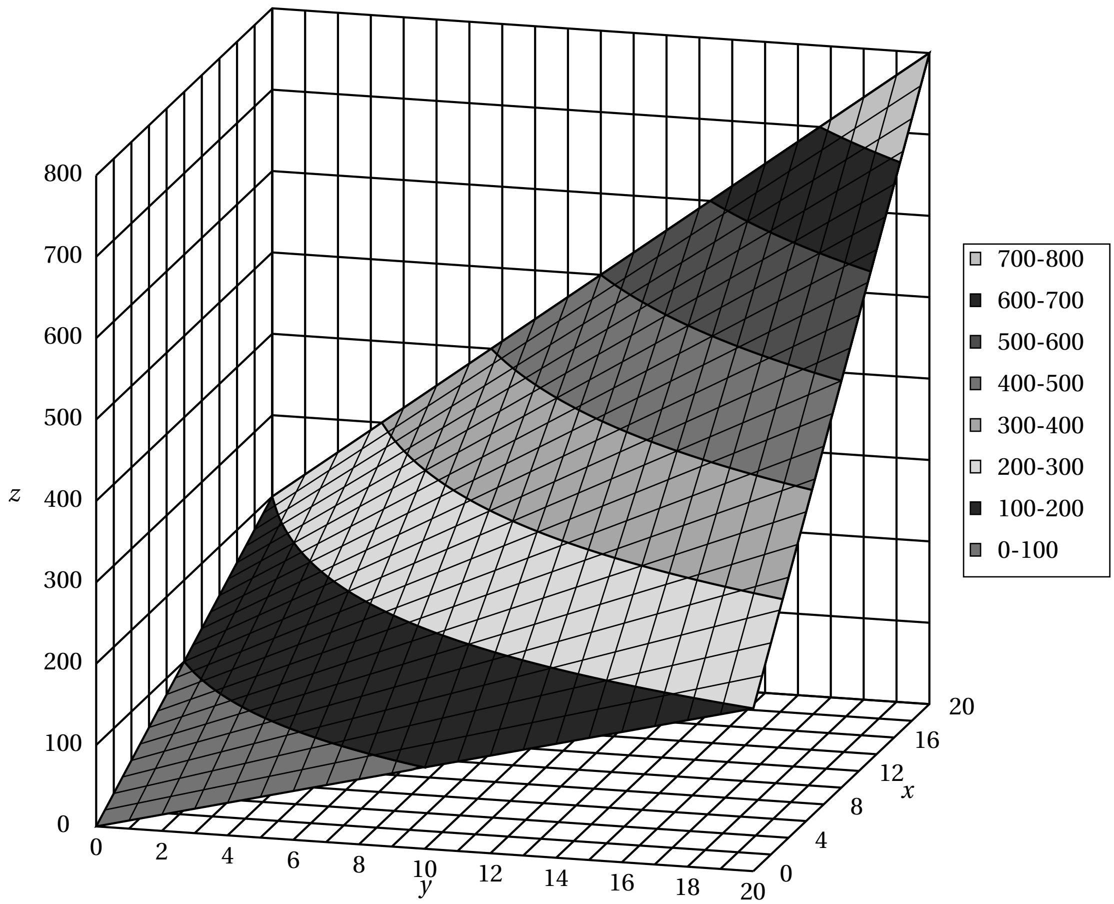
Exercice 2

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x_i = a_i - 1950$	30					
$t_i = \ln x_i$	3,401					
y_i	11,4					

Exercice 3



Spé ES Antilles Guyanne Septembre 2007



∽ Baccalauréat ES Métropole–La Réunion ∽
septembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

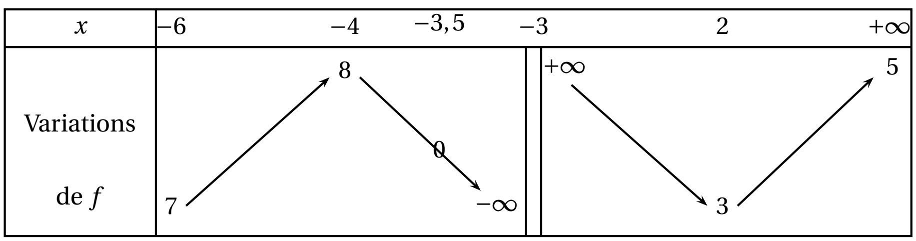
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point.*

Une fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble $]-6\ ;\ -3[\cup]-3\ ;\ +\infty[$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :



1. On peut affirmer que :
   Réponse A : $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = +\infty$. Réponse B : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 5$
   Réponse C : $\lim\limits_{x\to -6} f(x) = -\infty$. Réponse D : $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} f(x) = 0$.
2. La courbe représentative de f admet pour asymptotes les droites d'équation :
   Réponse A : $x = 5$ et $y = -3$ Réponse B : $x = -3$ et $y = 5$.
   Réponse C : $y = 8$ et $y = 3$ Réponse D : $x = -6$ et $y = 5$.
3. Dans l'ensemble $]-6\ ;\ -3[\cup]-3\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 4$ admet
   Réponse A : 0 solution Réponse B : 1 solution
   Réponse C : 2 solutions Réponse D : 3 solutions
4. On considère le nombre réel $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :
   Réponse A : $0 \leqslant I \leqslant 3$ Réponse B : $6 \leqslant I \leqslant 10$
   Réponse C : $3 \leqslant I \leqslant 6$ Réponse D : $I \geqslant 10$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau suivant donne, en milliers, le nombre de Pactes civils de solidarité (PACS) signés chaque année en France :

Années	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année, x_i	0	1	2	3	4
Nombres de PACS en milliers, y_i	22,1	19,4	25	31,1	39,6

Source INSEE.

1. Calculer, à 0,1 près, le pourcentage d'augmentation du nombre de milliers de Pactes civils de solidarité entre 2000 et 2004.

2. On envisage un ajustement affine

a. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$. Par la suite, on pose $f(x) = ax + b$.

b. En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2007, donner une estimation du nombre de milliers de Pactes civils de solidarité signés en 2007.

3. On envisage un autre type d'ajustement

On modélise le nombre de milliers de Pactes civils de solidarité signés durant l'année $2000 + x$ (x entier) à l'aide de la fonction g définie par

$$g(x) = 1,6x^2 - 1,8x + 21,4.$$

a. En utilisant ce second modèle, calculer le nombre de milliers de Pactes civils de solidarité signés en 2007.

b. On suppose que l'évolution se poursuit selon ce modèlejusqu'en 2015. Le nombre de milliers de Pactes civils de solidarité signés en 2010 sera-t-il supérieur à 100 000 ? Justifier.

4. Comparaison des deux ajustements

Pour chacun des deux modèles, on calcule ci-dessous le tableau des carrés des écarts entre les valeurs réelles et les valeurs calculées à l'aide de chacun des deux ajustements.

x_i	0	1	2	3	4
$\left[(y_i - f(x_i)\right]^2$	16	11,36	5,95	1,02	7,95

x_i	0	1	2	3	4
$\left[(y_i - g(x_i)\right]^2$	0,49				

a. Recopier et compléter le deuxième tableau, les valeurs étant arrondies au centième.

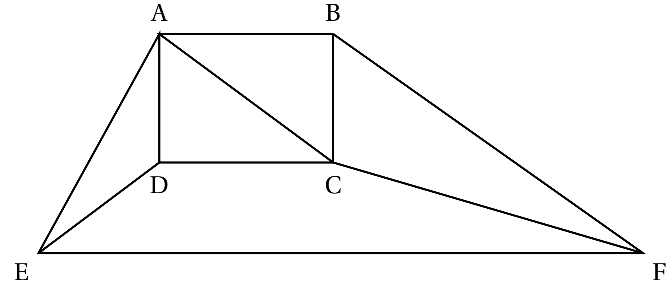
b. Lequel de ces deux ajustements semble le plus proche de la réalité ? Justifier.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie I

Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent ses avenues commerçantes et les sommets du graphe les carrefours de ces avenues.

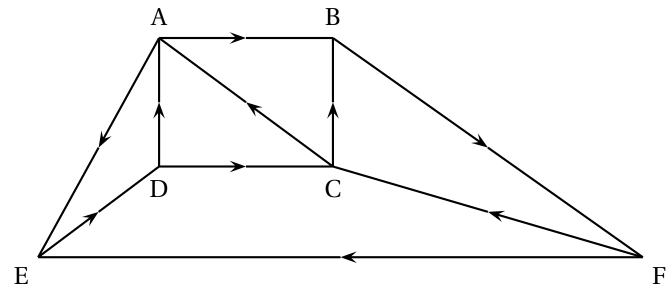


1. Donner l'ordre de ce graphe, puis le degré de chacun de ses sommets.

2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue ? Justifier votre réponse.

Partie II

Dans le graphe suivant, on a indiqué le sens de circulation dans les différentes avenues.



1. Écrire la matrice M associée à ce graphe.
(On rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).
2. a. Quel est le nombre de trajets de longueur 2 reliant D à B ?
   b. Comment pourrait-on obtenir ce résultat uniquement par le calcul à partir de la matrice M ?

EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

La courbe ($\mathscr{C}$) donnée en ANNEXE, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur R. On note f' sa fonction dérivée.
Les points A (3 ; e) et B (4 ; 2) appartiennent à cette courbe.
La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

PARTIE I : lecture graphique

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle [3 ; 10] a-t-on $f(x) \leqslant 2$?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

PARTIE II étude de la fonction

La fonction f représentée dans l'ANNEXE, est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{(-x+4)}$$

1. a. Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
   b. On donne $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.
   b. Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
En déduire la valeur moyenne m de f sur l'intervalle [2 ; 10]. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millième.
Rappel : Soit f une fonction et $[a\,;\,b]$ un intervalle sur lequel f est définie et

dérivable.
La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a\,;\,b]$ est le nombre m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

PARTIE III : étude d'un bénéfice
Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour $1,8 \leqslant x \leqslant 4,5$.
Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1,8\,;\,4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats
Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but. Chaque partie consiste à tirer successivement deux tirs au but.
Au vu des résultats obtenus au cours de l'année, on admet que :

- la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est égal à $0,8$;
- s'il réussit le premier, alors la probabilité de réussir le second est $0,7$;
- s'il manque le premier, alors la probabilité de réussir le second est $0,5$.

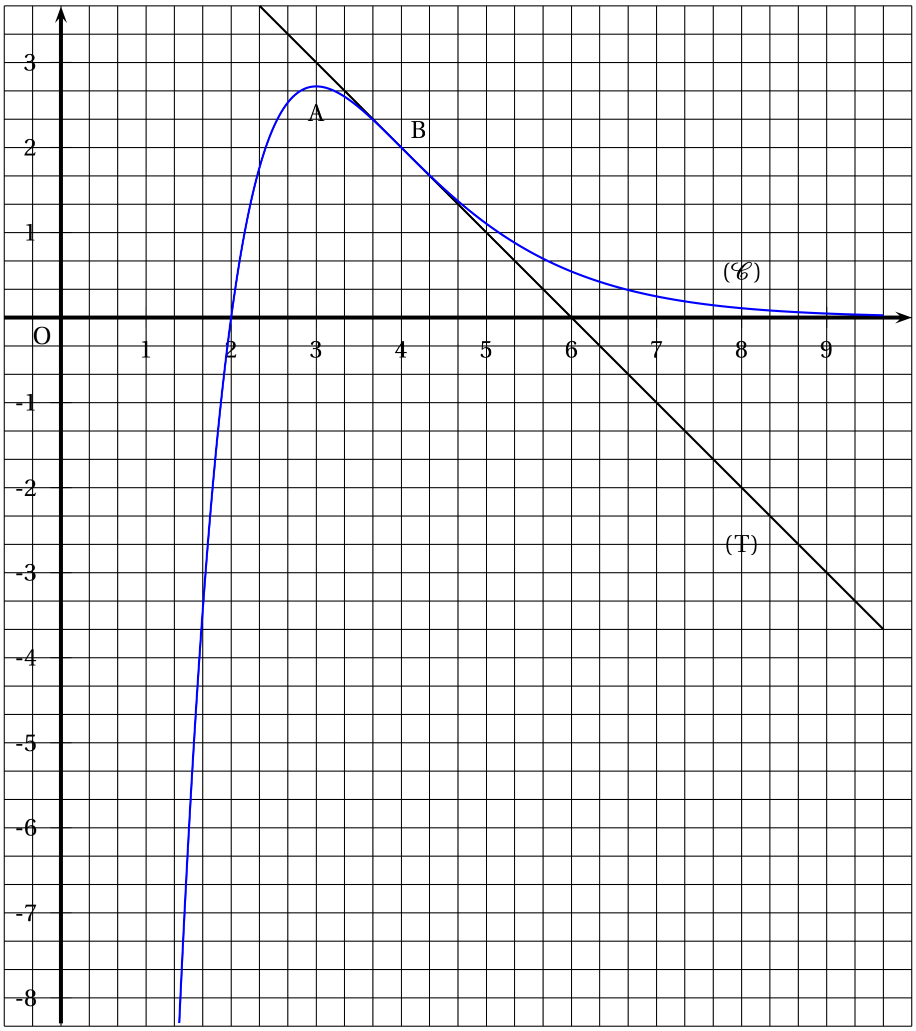
On note R_1 l'évènement : « le premier tir au but est réussi » et $\overline{\mathrm{R}_1}$ son évènement contraire,
R_2 l'évènement : « le second tir au but est réussi » et $\overline{\mathrm{R}_2}$ son évènement contraire.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que les deux tirs au but soient réussis.
3. **a.** Calculer la probabilité que le second tir au but soit réussi.
   b. Les évènements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
4. On note A l'évènement : « Jean a réussi exactement un tir au but ».
   Montrer que $p(\mathrm{A}) = 0,34$.

ANNEXE

EXERCICE 3

Commun à tous les candidats



Baccalauréat ES Polynésie septembre 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une buvette, située en bordure de plage, est ouverte de 12 heures à 18 heures. Elle propose des crêpes salées et des crêpes sucrées.
Chaque client achète une seule crêpe.
60 % des clients se présentent à l'heure du déjeuner (entre 12 heures et 14 heures).
Parmi les clients achetant une crêpe l'après-midi (à partir de 14 heures), 80 % choisissent une crêpe sucrée.
On appelle :
D l'évènement : « le client est venu à l'heure du déjeuner ».
A l'évènement : « le client achète une crêpe salée ». On sait que la probabilité qu'un client achète une crêpe salée est égale à 0,62.
On pourra représenter les différentes situations par des arbres pondérés.
Les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Déterminer les probabilités des évènements D et $\overline{\text{D}}$.
2. **a.** Un client est venu l'après-midi. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une crêpe salée ?

   b. Calculer $P\left(\text{A} \cap \overline{\text{D}}\right)$.

   c. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(\text{A} \cap \text{D})$.

   d. Un client vient à l'heure du déjeuner ; montrer que la probabilité qu'il achète une crêpe salée est égale à $0,9$.
3. Un client a acheté une crêpe salée ; quelle est la probabilité, à $0,01$ près, qu'il soit venu l'après-midi ?
4. On vend 3 euros une crêpe salée et 2 euros une crêpe sucrée. La buvette reçoit 250 clients par jour. Quelle est l'espérance de la recette quotidienne due à la vente de crêpes ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions ci-dessous, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. La fonction $x \mapsto \text{e} + \dfrac{1}{5}$ est la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \text{e}x + \ln 5$.
2. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\left(\text{e}^x - 1\right)\left(\text{e}^x + 4\right) = 0$ est : $S = \{0\}$.
3. Si $\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^n \leqslant 0,7$ alors $n \geqslant \dfrac{\ln 0,7}{\ln 0,99}$.
4. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\ln\left(x^2 + 4x + 3\right) = \ln(5x + 9)$ est $S = \{-2\ ;\ 3\}$.
5. La limite quand x tend vers 1, $x < 1$, de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{2}\right)$ est 0.

EXERCICE 3 **9 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels.

On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0~;~+\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point E$(0~;~1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

Partie B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Vérifier que pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. En déduire que $(\mathscr{C})$ possède une asymptote dont on précisera une équation.
2. **a.** Calculer $f'(x)$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0~;~+\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
3. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0~;~4]$.
   b. Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
4. On considère la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = -(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que g est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0~;~4]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.
   (Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a~;~b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.)

Partie C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0~;~4]$.

Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression :

$$f(q) = (q+1)\mathrm{e}^{-q}.$$

1. Combien coûte, en moyenne, à l'euro près, la production de 4 +.2 222 em 000 pièces ?
2. À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0,5 euro ?

Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

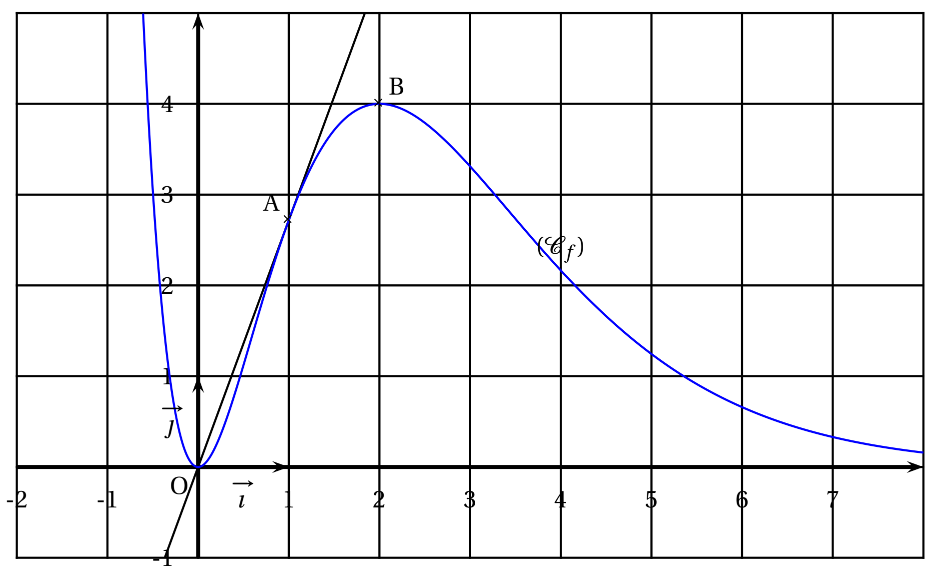
On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La figure ci-dessous montre une partie de sa courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On dispose des renseignements suivants sur la fonction f et la courbe $(\mathscr{C}_f)$:

- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$, elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$;
- la courbe $(\mathscr{C}_f)$ passe par l'origine du repère et par les points A$(1 ; \text{e})$ et B$(2 ; 4)$;
- la droite (OA) est tangente en A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.

On note f' la fonction dérivée de f et on appelle F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.



Pour chacune des affirmations suivantes, en utilisant les informations données par l'énoncé, cocher la cas V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'annexe 1 *à rendre avec votre copie. Il n'est pas demandé de justifier les réponses. Une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse n'enlève aucun point et n'en rapporte aucun. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est* 0.

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = --\infty$.
2. L'équation $f(x) = 0,1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
3. $f'(1) = f(1)$.
4. $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\text{d}x < 5$.
5. $\displaystyle\int_1^3 f'(x)\,\text{d}x < 1$.
6. La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.
7. $F(5) > F(6)$.

8. La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidat n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique.

L' éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels.

On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contatcté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à $0,2$; s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à $0,4$; s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à $0,1$.

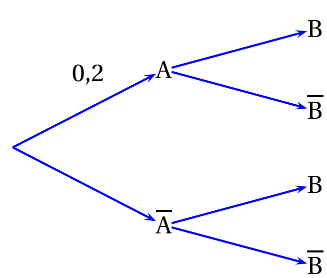
Partie I

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.

On note :

- A l'évènement « la personne s'abonne à l'édition papier »,
- B l'évènement « la personne s'abonne à l'édition électronique »,
- $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A, $\overline{\text{B}}$ l'évènement contraire de B.

1. a. Reproduire et compléter l'arbre suivant :



b. Donner la probabilité de $\overline{\text{B}}$ sachant A et la probabilité de $\overline{\text{B}}$ sachant $\overline{\text{A}}$.

2. a. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.

b. Justifier que la probabilité de l'évènement B est égale à $0,16$.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à l'édition électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à l'édition papier ?

Partie II

Pour chacune des personnes contactée, le centre d'appel reçoit de l'éditeur de la revue

- 2 € si la personne ne s'abonne à aucune des deux éditions ;
- 10 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition électronique ;
- 15 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition papier ;
- 20 € si la personne s'abonne aux deux éditions.

1. Reproduire et compléter, sans donner de justification, le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

Somme reçue en €	2	10	15	20
Probabilité				

2. Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation de la somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5 000 lecteurs potentiels.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidat n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Une banque propose à ses clients de s'abonner au service « bank.net » qui permet de consulter son compte et d'effectuer des transactions via une connexion internet.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de clients de la banque et du nombre de clients abonnés à « bank.net » de l'année 2001 à l'année 2006.

y_i est le nombre de milliers de clients de la banque au 1er janvier de l'année de rang x_i,

q_i est le nombre de milliers de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1er janvier de l'année de rang x_i.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de clients : y_i (en milliers)	298	310	321	330	339	348
Nombre d'abonnés à « bank.net » : q_i (en milliers)	45	53	63	74	87	103

Les séries statistiques $(x_i\ ;\ y_i)$ et $(x_i\ ;\ q_i)$ sont représentées sur la figure de l'annexe 2.

1. a. Calculer le pourcentage de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1er janvier de l'année 2001 (donner le résultat arrondi à l'unité).

b. Calculer le taux d'accroissement du nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » entre le 1er janvier 2001 et le 1er janvier 2006 (ce taux sera exprimé en pourcentage et arrondi à l'unité).

2. Modélisation de l'évolution du nombre de clients de la banque par un ajustement affine.

a. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi au dixième et l'ordonnée à l'origine sera arrondie à l'unité.

b. En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients de la banque au premier janvier 2010.

3. La forme du nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ q_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel.

En effectuant le changement de variable $z_i = \ln\left(q_i\right)$, on obtient la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés d'équation
$z = 0,165x + 3,642$.

a. En déduire une expression de q en fonction de x de la forme $q = kA^x$ et donner les valeurs approchées arrondies au centième des constantes k et A.

b. On admet que l'évolution du nombre de clients abonnés à « bank.net » entre les années 2001 et 2006 peut être modélisée par la relation
$q = 38,17 \times (1,18)^x$. En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients abonnés à « bank.net » au 1er janvier 2010.

c. Quel serait, selon l'estimation obtenue à la question 2. b. et l'estimation précédente, le pourcentage de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1er janvier 2010 ?

4. On suppose que, jusqu'au 1er janvier 2016, le nombre de clients de la banque évolue selon le modèle obtenu à la question 2. a. et le nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » évolue selon le modèle donné à la question

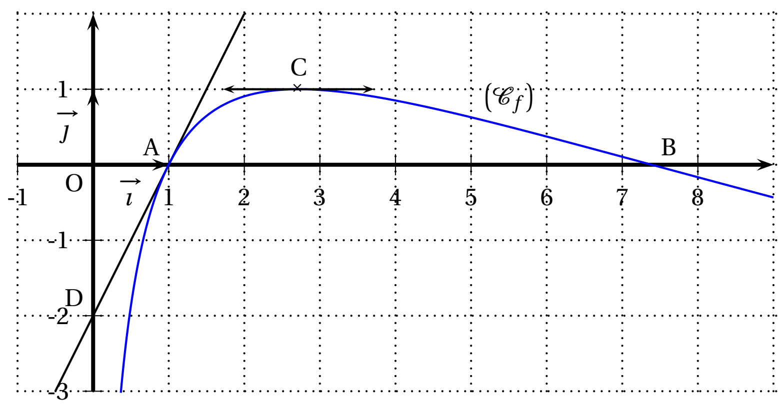
3.b.
À l'aide de ces deux modèles, quelles prévisions obtient-on pour 2016 ?
Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 4 **6 points**

On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

La figure ci-dessous donne la courbe représentative $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ coupe l'axe des abscisses en A(1 ; 0) et en B.
La tangente en C à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ coupe l'axe des ordonnées en D.



1. Déterminer l'abscisse du point B (la valeur exacte est demandée).
2. Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
3. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$$
   b. Déterminer les coordonnées du point C et l'ordonnée du point D (les valeurs exactes sont demandées).
4. **a.** Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par
   $$g(x) = x[f(x) + 2\ln x - 4].$$
   Démontrer que g est une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Calculer $\displaystyle\int_1^{\text{e}^2} f(x)\,\text{d}x$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

Annexe 1 (à rendre avec sa copie)

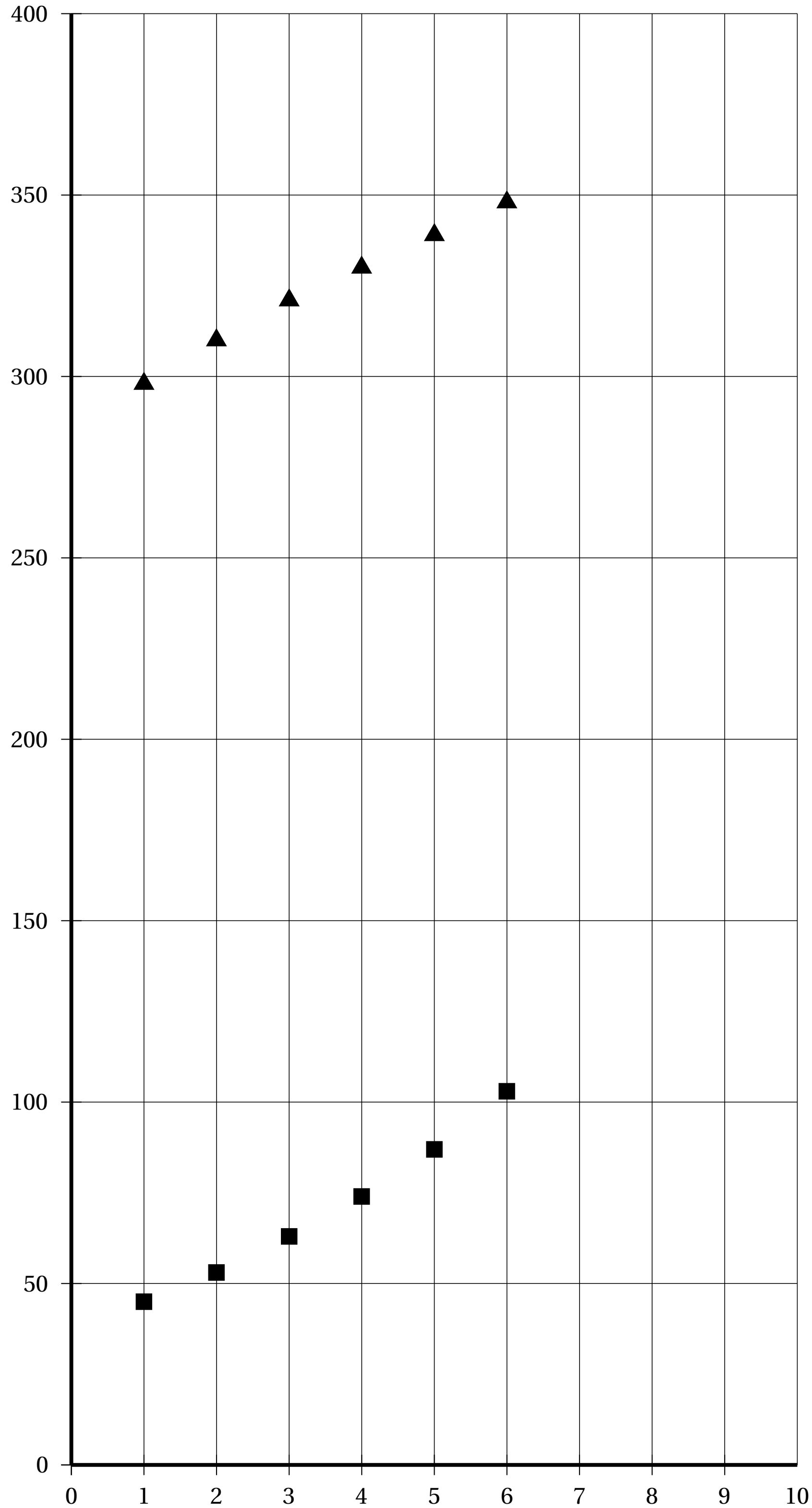
Exercice 1

Affirmations	V	F
a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.		
b. L'équation $f(x) = 0,1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.		
c. $f'(1) = f(1)$.		
d. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x < 5$.		
e. $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x < 1$.		
f. La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.		
g. $F(5) > F(6)$.		
h. La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.		

Annexe 2

Exercice 3

Représentation graphique des séries statistiques $(x_i ; y_i)$ et $(x_i ; q_i)$



Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, strictement croissante sur l'intervalle $]0~;~2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

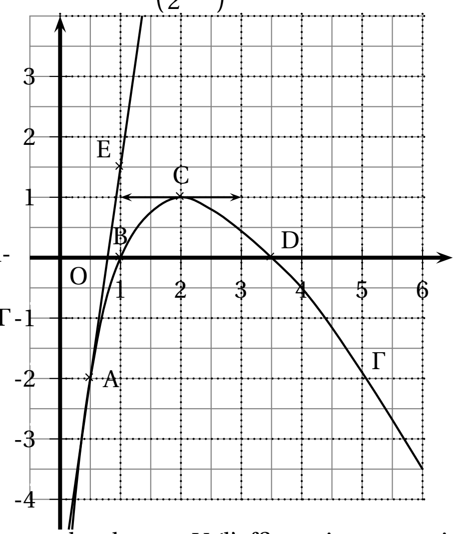
La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormé est tracée ci-dessous.

Elle passe par les points $A\left(\dfrac{1}{2}~;~-2\right)$, $B(1~;~0)$, $C(2~;~1)$ et $D\left(\dfrac{7}{2}~;~0\right)$.

E est le point de coordonnées $\left(1~;~\dfrac{3}{2}\right)$.

La courbe Γ admet au point C une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La droite (AE) est tangente à la courbe Γ au point A.



Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'annexe, à rendre avec la copie.

Les réponses ne seront pas justifiées.

NOTATION : *une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte retire* 0,25 *point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

1. L'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$
2. Le coefficient directeur de la droite (AE) est égal à $\dfrac{1}{7}$.
3. Les fonctions f et f' ont le même signe sur l'intervalle $[1~;~2]$.
4. Les primitives de la fonction f sont croissantes sur l'intervalle $\left[1~;~\dfrac{7}{2}\right]$.
5. On peut calculer $\ln[f(x)]$ pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
6. La fonction g définie sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$ par $g(x) = \text{e}^{f(x)}$ est croissante sur cet intervalle.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un club sportif a été créé au début de l'année 2000 et, au cours de cette année-là, 140 adhérents s'y sont inscrits.

Le tableau cl-dessous donne le nombre d'adhérents de 2000 à 2005.

année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
nombre d'adhérents y_i	140	165	220	240	260	310

Le détail des calculs statistiques à effectuer à la calculatrice n'est pas demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ le nuage des points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à cette série statistique.
On prendra comme unités graphiques 2 cm pour 1 année en abscisse et 1 cm pour 10 adhérents en ordonnées. Sur l'axe des ordonnées, on commencera la graduation à 120.

2. Un premier ajustement du nuage des points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$

a. On désigne par G_1, le point moyen des trois points M_1, M_2 et M_3 du nuage et par G_2 le point moyen des trois points M_4, M_5 et M_6 du nuage.
Calculer les coordonnées respectives de G_1 et de G_2 dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

b. Déterminer l'équation réduite $y = Ax + B$ de la droite (G_1G_2) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les coefficients A et B seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.
Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

c. En utilisant la droite (G_1G_2) comme droite d'ajustement du nuage, calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2007.

3. Dans cette question, on utilise la droite des moindres carrés,

a. Soit Δ la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite Δ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

b. En utilisant la droite Δ, calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2007.

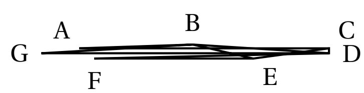
4. a. Si le taux d'augmentation du nombre d'adhérents d'une année à l'autre était fixe et égal à $t\,\%$, quelle serait la valeur de t arrondie au centième qui donnerait la même augmentation du nombre d'adhérents entre 2000 et 2005 ?

b. Avec ce même taux d'augmentation t, quel serait le nombre d'adhérents, arrondi à l'unité, pour l'année 2007 ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sur le graphe cl-contre, les sept sommets A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept villes. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une liaison entre les deux villes correspondantes.



Les questions 1, 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ?

2. On note M la matrice associée au graphe ci-dessus. Les sommets sont rangés suivant l'ordre alphabétique.

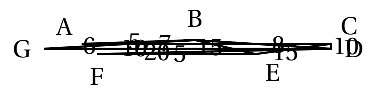
On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 9 & 2 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F.

Les citer tous. Aucune justification n'est demandée.

3. On donne ci-dessous et sur le graphe ci-contre les distances exprimées en centaines de kilomètres entre deux villes pour lesquelles il existe une liaison :

AB : 5 ; AC : 7 ;
BD : 8 ; BE : 15 ;
BG : 6 ;CD : 10 ;
CE : 15 ; DF : 20 ;
DG : 10 ; EF : 5 ;



Un représentant de commerce souhaite aller de la ville A à la ville F.

En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une étude réalisée auprès des élèves d'un lycée a permis d'établir que 55 % des élèves possèdent un ordinateur. Parmi les élèves qui ont un ordinateur, 98 % possèdent un téléphone portable.

De plus, parmi ceux qui possèdent un téléphone portable, 60 % possèdent un ordinateur.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au centième donc les pourcentages à l'unité.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : on choisit au hasard un élève de ce lycée.

On note :

- M l'évènement : « L'élève possède un ordinateur » ;
- T l'évènement : « L'élève possède un téléphone portable » ;
- $\overline{M}$ l'évènement contraire de M ;
- $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

1. **a.** Calculer la probabilité que l'élève possède un ordinateur et un téléphone portable.

b. En déduire la probabilité que l'élève possède un téléphone portable.

2. **a.** On prend 0,90 comme valeur de la probabilité de l'évènement T.
Calculer la probabilité que l'élève ne possède pas d'ordinateur mais possède un téléphone portable.

b. En déduire la probabilité que l'élève possède un téléphone portable sachant qu'il ne possède pas d'ordinateur.

Partie B : on choisit trois élèves au hasard, indépendamment les uns des autres.
On note E l'évènement : « Exactement deux des trois lycéens choisis possèdent un ordinateur ».
Calculer la probabilité de l'évènement E.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A
On considère la fonction h définie et dérivable sur R par

$$h(x) = \mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^{x} + 6.$$

On note h' sa fonction dérivée.

1. **a.** Calculer la limite de la fonction h en $-\infty$.
   b. Calculer la limite de la fonction h en $+\infty$; on pourra utiliser l'égalité vraie pour tout réel x : $h(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 7 + 6\mathrm{e}^{-x}\right)$.
2. Calculer $h\left[\ln\left(\dfrac{7}{2}\right)\right]$, $h(0)$ puis $h(\ln 6)$.
3. Déterminer par le calcul l'image $h'(x)$ d'un réel x par la fonction h' et étudier les variations de la fonction h.
   Dresser le tableau de variations de la fonction h et faire figurer les résultats des questions précédentes dans ce tableau.
4. En déduire le tableau des signes de la fonction h.

Partie B
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 6 - 6\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{x} - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère du plan d'unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.
Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données en annexe.

1. Démontrer que le point de coordonnées $(\ln 6\ ;\ 5)$ est un point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{-h(x)}{\mathrm{e}^{x}}$.
   b. Déterminer, par le calcul, la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan limité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 6$.
   a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique donné en annexe.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2 puis en donner une valeur approchée arrondie au centième.

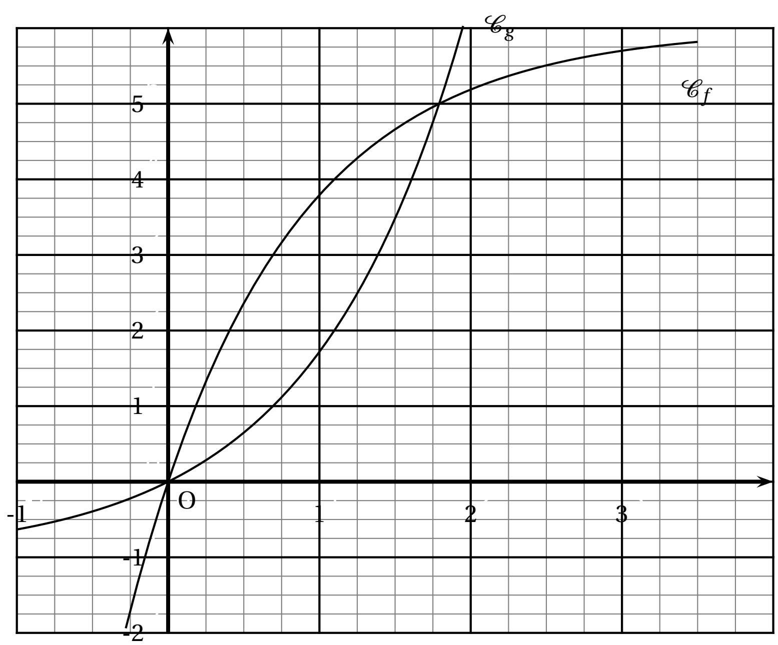
ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 1

Affirmation	V	F
1. L'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.		
2. Le coefficient directeur de la droite (AE) est égal à $\dfrac{1}{7}$.		
3. Les fonctions f et f' ont le même signe sur l'intervalle $[1~;~2]$.		
4. Les primitives de la fonction f sont croissantes sur l'intervalle $\left[1~;~\dfrac{7}{2}\right]$.		
5. On peut calculer $\ln[f(x)]$ pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.		
6. La fonction g définie sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$ est croissante sur cet intervalle.		

Exercice 4



Baccalauréat ES Pondichéry 16 avril 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

1. Le prix d'un produit dérivé du pétrole a augmenté de 60 % durant l'année 2005. Pour revenir à sa valeur initiale, ce prix doit baisser de
- 70 %.
- 60 %.
- 40 %.
- 37,5 %.

2. Lors d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements indépendants A et B qui vérifient $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,5$. On a alors :
- $P(A \cup B) = 0,65$.
- $P(A \cup B) = 0,8$.
- $P(A \cup B) = 0,15$.
- Les données ne permettent pas de calculer $P(A \cup B)$.

3. f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x}$.
La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan admet pour asymptote la droite d'équation :
- $y = 0$.
- $y = 2x - 1$.
- $x = 2$
- $y = -x + 1$.

4. Le nombre $A = 2\ln\left(\dfrac{e}{4}\right) + 5\ln 2 + \ln\left(\dfrac{8}{e}\right)$ est égal à :
- $1 + 4\ln 2$.
- $4\ln 2 + 3$.
- $2\ln 5 + 1$.
- $8\ln 2$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A, la destination G et la destination M.

50 % des clients choisissent la destination A ;
30 % des clients choisissent la destination G ;
20 % des clients choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.

Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients

ayant choisi la destination G.
On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.

On note les évènements :

- A : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A » ;
- G : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G » ;
- M : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M » ;
- $\overline{S}$: « le questionnaire est celui d'un client satisfait » ;
- S « le questionnaire est celui d'un client insatisfait ».

1. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.

2. **a.** Traduire par une phrase les évènements $G \cap S$ et $M \cap S$ puis calculer les probabilités $P(G \cap S)$ et $P(M \cap S)$.

b. L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(A \cap S)$.

c. En déduire $P_A(S)$, probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement A est réalisé.

3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait.
Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie.
Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (*on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible*).

4. On prélève successivement au hasard trois questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'évènement : « les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits » (*on donnera le résultat arrondi au millième*).

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Un centre d'appel comptait en 2001 soixante-six employés. Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre d'employés en fonction du rang de l'année.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'employés y_i	66	104	130	207	290	345	428

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'employés en fonction du rang x de l'année.
Une étude graphique montre qu'un ajustement affine ne convient pas.

On pose alors $z = \sqrt{y} - 3$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant (*on donnera les résultats sous forme décimale, arrondis au centième*)

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	5,12						

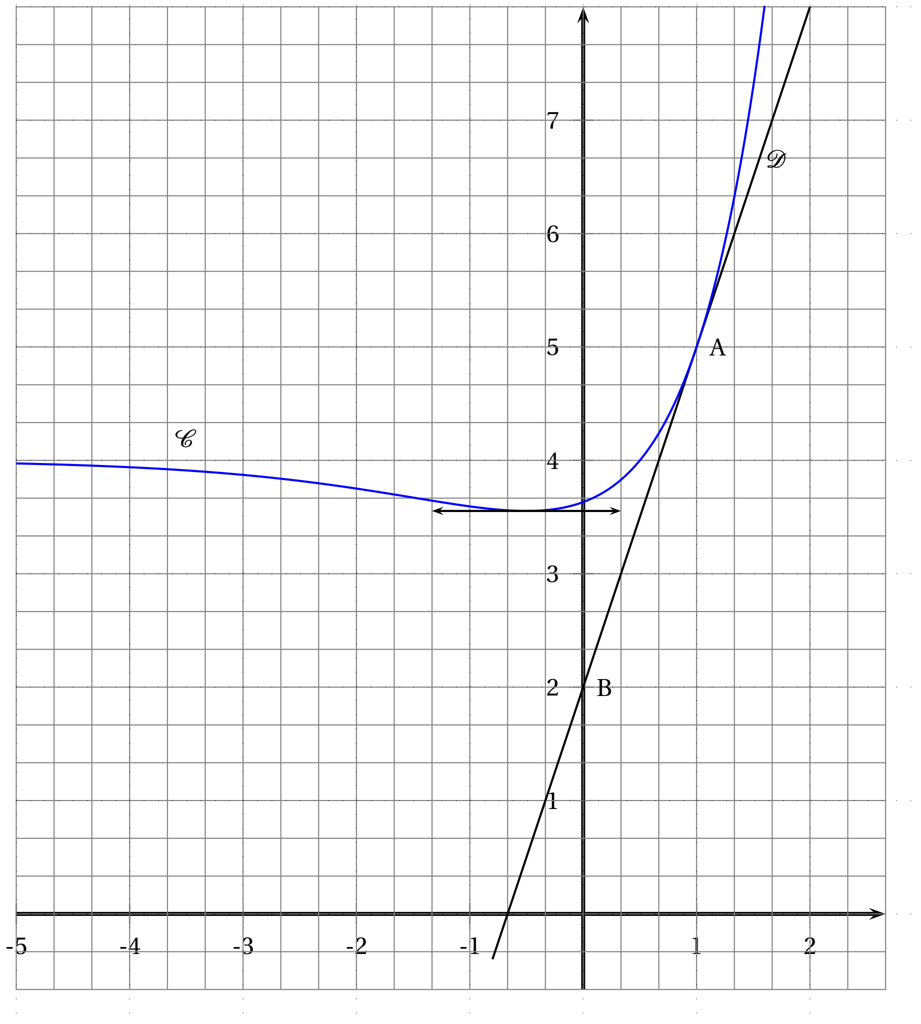
2. Représenter le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ z_i)$ associé à cette série statistique, dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
Un ajustement affine vous paraît-il approprié ? Justifier la réponse.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (*on donnera les coefficients sous forme décimale, arrondis au centième*).
Tracer cette droite sur le graphique précédent.
4. En utilisant cet ajustement, à partir de quelle année peut-on prévoir que l'effectif de ce centre d'appel dépassera 900 employés ?

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats
Les trois parties sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{x-1} + c,$$

où a, b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer dans la partie A.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal est représentée ci-dessous.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A(1 ; 5), elle admet la droite $\mathscr{D}$ comme tangente en ce point.
Le point B(0 ; 2) appartient à la droite $\mathscr{D}$.
La courbe $\mathscr{C}$ admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.



Partie A

1. **a.** Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$. En déduire $f'(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel $x,\ f'(x) = (ax+a+b)\mathrm{e}^{x-1}$.

3. Montrer que $a,\ b$ et c vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 5 \\ a+2b & = & 0 \\ 2a+b & = & 3 \end{array}\right.$.

   Déterminer les valeurs de $a,\ b$ et c.

Partie B

On admet pour la suite de l'exercice que, pour tout réel $x,\ f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x-1} + 4$.

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. Vérifier que, pour tout réel $x,\ f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{x} + 4$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (on rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$).
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. **a.** Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.

b. Établir le tableau de variations de f.
Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution réelle α sur l'intervalle $[1~;~2]$. On donnera un encadrement de α d'amplitude $0,1$.
Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Partie C

1. On considère la fonction F définie pour tout réel x par

$$F(x) = (2x - 3)\mathrm{e}^{x-1} + 4x$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit Δ la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Calculer l'aire de la partie Δ exprimée en unités d'aire ; on donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie au dixième. .

Baccalauréat ES Amérique du Nord 29 mai 2008

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

f est une fonction définie sur $]-2~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}.$$

On note f' sa fonction dérivée et $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la bonne réponse sur l'annexe 1 *à remettre avec la copie.*
Aucune justification n'est demandée.
Barème : une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à* 0.

COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE EN ANNEXE

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Pour faire connaître l'ouverture d'un nouveau magasin vendant des salons, le directeur fait distribuer des bons publicitaires permettant de recevoir un cadeau gratuit sans obligation d'achat.
Une enquête statistique préalable a montré que, parmi les personnes qui entrent dans le magasin :

– 90 % entrent dans le magasin avec ce bon publicitaire. Parmi elles, 10
– Parmi les personnes qui entrent sans bon publicitaire, 80 % achètent un salon.

Une personne entre dans le magasin.
On note :

B l'évènement « la personne a un bon publicitaire ».
$\overline{\text{B}}$ l'évènement « la personne n'a pas de bon publicitaire».
S l'évènement « la personne achète un salon ».
$\overline{\text{S}}$ l'évènement contraire de S.

Partie I

1. Dessiner un arbre pondéré représentant la situation.
2. À l'aide de B, $\overline{\text{B}}$, S, $\overline{\text{S}}$, traduire les évènements suivants et calculer leur probabilité à 10^{-2} près :
   a. la personne n'achète pas de salon sachant qu'elle est venue avec un bon publicitaire ;
   b. la personne achète un salon ;
   c. la personne est venue avec un bon publicitaire sachant qu'elle a acheté un salon.

Partie II

Le bon publicitaire et le cadeau associé coûtent 15 € au magasin. Un salon vendu rapporte 500 € au magasin s'il est vendu sans bon publicitaire.

1. Compléter le tableau en **annexe I** qui donne la loi de probabilité du bénéfice réalisé par le magasin selon la situation de la personne entrant.

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	-15	500	0
Probabilité				

2. Calculer le bénéfice moyen du magasin réalisé par personne entrant.
3. Le directeur pense changer la valeur du cadeau offert. Soit x le prix de revient, en euros, du nouveau bon publicitaire. Calculer, dans ce cas, l'espérance E de la loi de probabilité du bénéfice du magasin en fonction de x.
4. Le directeur souhaite réaliser 76 € de bénéfice moyen par personne entrant. Quel doit être le prix de revient x du nouveau bon publicitaire ?

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I (calculs exacts demandés)

Sur une route, deux intersections successives, "a" et "b" sont munies de feux tricolores. On suppose que ces feux ne sont pas synchronisés et fonctionnent de manière indépendante On admet que :

– La probabilité que le feu de "a" soit vert est égale à $\dfrac{3}{4}$;

– La probabilité que le feu de "b" soit vert est égale à $\dfrac{1}{2}$.

On note A l'évènement : « le feu de "a" est vert », B l'évènement « le feu de "b" est vert ».
Un automobiliste passe successivement aux deux intersections "a" et "b".

1. Calculer la probabilité qu'à son passage, les deux feux soient verts.

2. Calculer la probabilité qu'à son passage, il rencontre au moins un feu vert.

Partie II (résultats demandés à 10^{-2} près)

Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :
À chaque intersection :

– Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité $0,9$ ou sera rouge avec la probabilité $0,05$.
– Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité $0,1$ ou sera vert avec la probabilité $0,8$.
– Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité $0,5$ ou sera orange avec la probabilité $0,05$.

n étant un entier naturel non nul, on note :

– V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la n-ième intersection,
– O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange a la n-ième intersection,
– R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la n-ième intersection,
– $P_n = [V_n \;\; O_n \;\; R_n]$ la matrice traduisant l'état probabiliste du n-ième feu tricolore.

1. **a.** Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.

b. Donner la matrice de transition M complétée de ce graphe :

$$M = \begin{bmatrix} \dots & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & \dots & 0,1 \\ 0,45 & \dots & 0,5 \end{bmatrix}$$

2. **a.** Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.

b. On donne $P_3 = [0,87 \;\; 0,05 \;\; 0,08]$. Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ?

3. Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.

4. On remarque que, quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, on obtient à partir d'un certain rang n : $P_n = [0,85 \;\; 0,05 \;\; 0,10]$.
Donner une interprétation concrète de ce résultat.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Historiquement, on avait décidé de numéroter les planètes du système solaire suivant leur distance moyenne au Soleil. Ainsi, on notait :

Mercure = 1

Venus = 2

Terre = 3

Mars = 4

Céres = 5

Jupiter = 6

Saturne = 7

Uranus = 8

On considère la série statistique double $(i\ ;\ d_i)_{1\leqslant i\leqslant 8}$, où i représente le numéro d'ordre de la planète et d_i sa distance au soleil (en millions de km) :
(1 ; 57,94), (2 ; 108,27), (3 ; 149,60), (4 ; 228,06), (5 ; 396,44), (6 ; 778,73), (7 ; 1 427,7), (8 ; 2 872,4).

1. Indiquer, à l'aide d'une phrase, la signification du couple (3 ; 149,60).

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

2. Compléter, dans l'annexe 1, le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1 427,7	2 872,4
$d_i - d_1$	0			170,12				
$Y_i = \ln(d_i - d_1)$	×			5,137				

3. **a.** Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement (D), de la série $(i\ ;\ y_i)$, avec i compris entre 1 et 8.

b. Construire le nuage de points $(i\ ;\ y_i)$, avec i compris entre 1 et 8, et la droite (D) dans un repère orthonormal, unités : 2 cm

4. **a.** Déduire de ce qui précède que l'on peut modéliser l'expression de d_i, en fonction de i, avec i compris entre 1 et 8, sous la forme
$d_i = 57,94 + 12,16 \times 1,966^i$.

b. Calculer la distance moyenne probable au soleil d'une planète numérotée 9.

(*Ce résultat est connu sous le nom de loi de Titius-Bode du nom dc deux astronomes allemands qui permirent la découverte de Neptune n*^{o} 9 *en* 1848. *La loi tomba ensuite en désuétude mais l'ajustement étudié demeure excellent si l'on inclut « Pluton »... La planète naine en n*^{o} 10).

EXERCICE 4 **6 points**
Commun a tous les candidats

Rappel : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I et $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u$.

Un transporteur, s'occupant de voyages organisés, achète en l'an 2000 (instant initial $t = 0$), un autocar nécessitant un investissement initial de 200 milliers d'euros.

Partie A

Cet investissement se déprécie. Sa dépréciation cumulée, en milliers d'euros, a l'instant t, mesurée en années, est notée $D(t)$.
On pose

$$D(t) = 200\left(1 - \mathrm{e}^{-0,086t}\right) \quad \text{pour tout réel } t \text{ de l'intervalle I} = [0\,;\,13].$$

L'annexe 2 donne la courbe représentative de D dans le plan rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Déterminer graphiquement au cours de quelle année l'investissement aura perdu 60 % de sa valeur (faire apparaître sur le graphique les tracés qui permettent d'obtenir la réponse).

Partie B

Le transporteur veut revendre l'autocar. On note $V(t)$ la valeur de l'autocar l'année t, $0 \leqslant t \leqslant 13$.

1. Vérifier que $V(t) = 200 \times \mathrm{e}^{-0,086t}$.
2. Étudier le sens de variation de V sur $[0\,;\,13]$.
3. Combien peut-on espérer revendre l'autocar au bout de 13 ans de service ? (au millier d'euros près).
4. Au cours de quelle année l'autocar a-t-il perdu la moitié de sa valeur ?

Partie C

On estime que les recettes nettes (en milliers d'euros) procurées par l'exploitation de cet autocar, hors dépréciation du véhicule, sont données à l'instant t réel de l'intervalle $[0\,;\,13]$ par :

$$R(t) = 110\left(5 + t - 5\mathrm{e}^{0,1t}\right).$$

1.
   a. Calculer la dérivée R' de la fonètion R ; étudier son signe sur $[0\,;\,13]$ et construire le tableau de variations de R.

   b. En déduire, que les recettes nettes sont maximales pour une valeur t_0 de t dont on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie à l'unité près.

   c. Construire la courbe représentative de la fonction R, dans le même repère que celle de D après avoir complété le tableau de valeurs de **l'annexe 2** où l'on arrondira $R(t)$ à l'entier le plus proche.
2. À tout instant, la différence $R(t) - D(t)$ représente l'exploitation $E(t)$ de l'autocar.
   Compléter le tableau de **l'annexe 2**, utiliser le graphique ou les tableaux de valeurs de D, R et E pour répondre aux questions suivantes :

   a. Au cours de quelle année l'exploitation de cet autocar est-elle la plus profitable ?

   b. À partir de quelle année l'exploitation de-cet autocar conduit-elle à un déficit ?

ANNEXE I
(À remettre avec la copie)

EXERCICE 1

$f(x) = \dfrac{3x+6}{x+2}$	☐ VRAI	☐ FAUX
La courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $3,5$.	☐ VRAI	☐ FAUX
$\displaystyle\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = 3$	☐ VRAI	☐ FAUX
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 6\ln 2$.	☐ VRAI	☐ FAUX
La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$	☐ VRAI	☐ FAUX
$f(x) > 3$ pour tout x de $]-2\,;\,+\infty[$.	☐ VRAI	☐ FAUX
$f'(-1) = -1$.	☐ VRAI	☐ FAUX
La fonction g définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \ln[f(x)]$ est décroissante.	☐ VRAI	☐ FAUX

EXERCICE 2

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	-15	500	0
Probabilité				

EXERCICE 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1 427,7	2 872,4
$d_i - d_1$	0			170,12				
$Y_i = \ln(d_i - d_1)$	×			5,137				

ANNEXE 2
(À remettre avec la copie)

EXERCICE 4

Représentation graphique

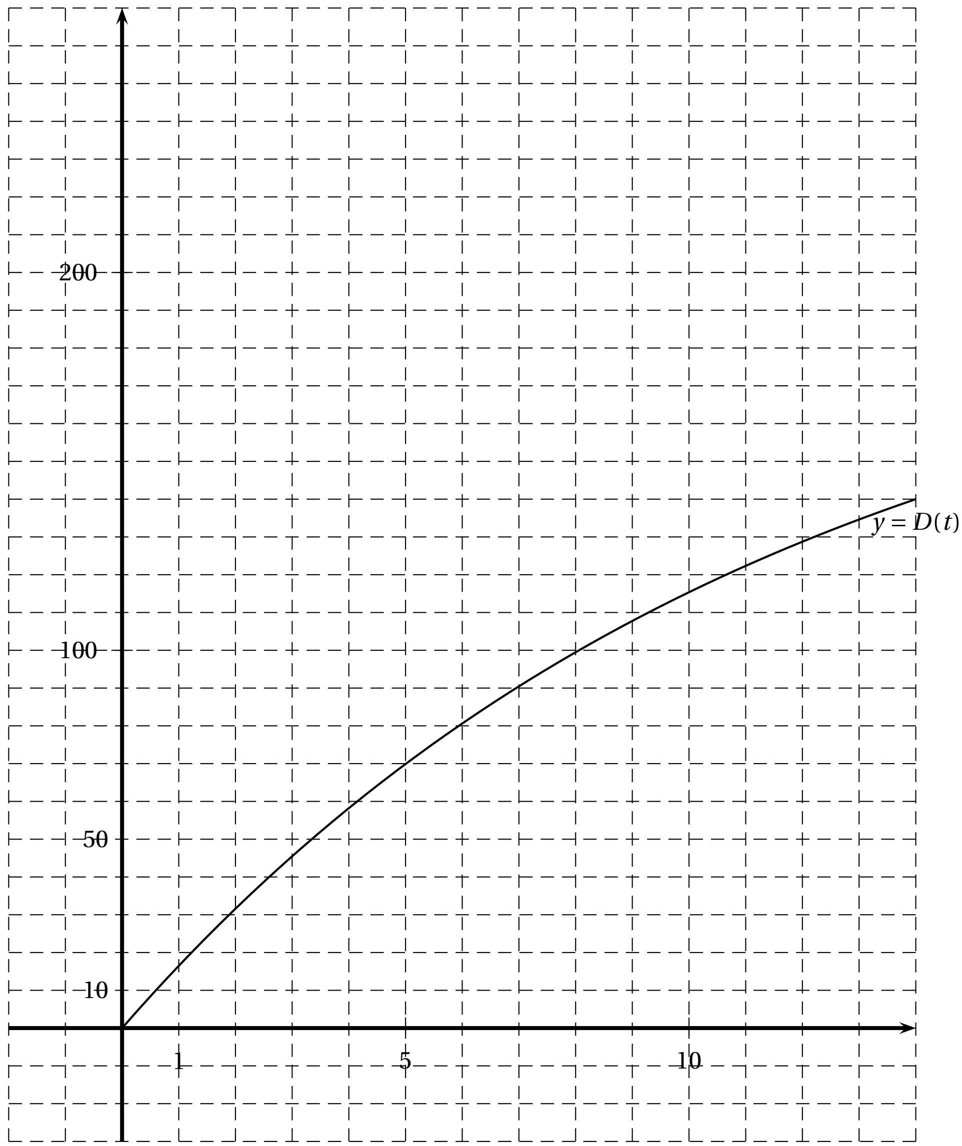


Tableau de valeurs :

t	0	1	2	4	6	8	10	11	13
$D(t)$	0	16	32	58	81	99	115	122	135
$R(t)$	0	52	98		208				−38
$E(t)$	0				127				

Liban 2008

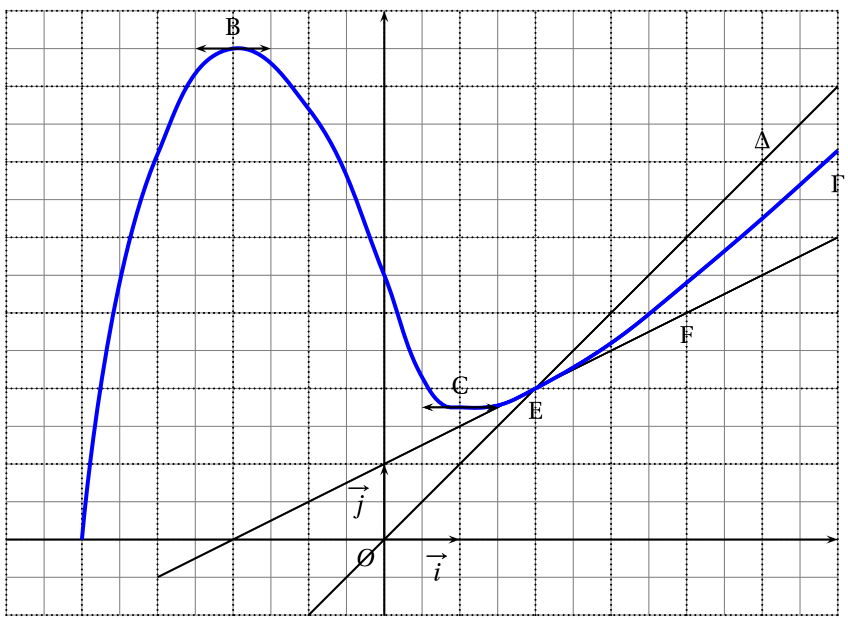
Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$. On note f' sa fonction dérivée.

La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée ci-dessous ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$. La courbe Γ et la droite Δ se coupent au point E d'abscisse 2. On sait par ailleurs que :

- la courbe Γ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points B$(-2\ ;\ 6,5)$ et C(1 ; 1,75),
- la droite (EF) est la tangente à la courbe Γ au point E ; F est le point de coordonnées (4 ; 3)



1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :

a. les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(2)$;

b. les valeurs de x dans l'intervalle [- 4 ; 6] vérifiant $f'(x) \geqslant 0$;

c. les valeurs de x dans l'intervalle [-4 ; 6] vérifiant $f(x) \leqslant x$.

2. Soit g la fonction définie sur]- 4 ; 6] par $g(x) = \ln[f(x)]$. Déterminer par lecture graphique et avec justification :

a. les variations de g ;

b. la limite de la fonction g quand x tend vers - 4.

3. Encadrement d'une intégrale

Dans cette question, toute trace de recherche. même incomplète, ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

a. Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement I.

b. Proposer un encadrement de l'intégrale I par deux nombres entiers consécutifs. Justifier.

Exercice 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un club de remise en forme propose, outre l'accès aux salles de musculation, des cours collectifs pour lesquels un supplément est demandé lors de l'inscription. Une fiche identifie chaque membre et son type d'abonnement : avec ou sans cours collectif.

Une étude sur les profils des membres de ce club a montré que :

40 % des membres sont des hommes.

65 % des membres sont inscrits aux cours collectifs.

Parmi les femmes, membres de ce club, seulement 5 % ne sont pas inscrites aux cours collectifs.

On choisit une fiche au hasard et on considère les évènements suivants :

- H : « la fiche est celle d'un homme »,
- F : « la fiche est celle d'une femme »,
- C : « la fiche est celle d'un membre inscrit à des cours collectifs ».

Rappel de notation : Si A et B sont deux évènements donnés, $p(\text{A})$ désigne la probabilité de A et $p_{\text{B}}(\text{A})$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.

1. Donner les probabilités suivantes : $p(\text{H})$, $p_{\text{F}}(\overline{\text{C}})$, $p_{\text{F}}(\text{C})$ et les reporter sur un arbre pondéré modélisant la situation qui sera complété au cours de la résolution de l'exercice.
2. **a.** Déterminer $p(\text{F} \cap \text{C})$.

   b. Montrer que $p(\text{H} \cap \text{C}) = 0,08$.

   c. On tire la fiche d'un homme, quelle est la probabilité que celui-ci soit inscrit aux cours collectifs ?

   d. Compléter l'arbre pondéré de la question 1.
3. On choisit au hasard une fiche d'un membre non inscrit aux cours collectifs. Quelle est la probabilité que ce soit celle d'un homme ? (donner la valeur décimale arrondie au centième).
4. Pour vérifier la bonne tenue de son fichier, la personne chargée de la gestion de ce club prélève une fiche au hasard et la remet après consultation. Elle procède ainsi trois fois de suite. Quelle est la probabilité qu'au moins une des fiches soit celle d'un membre non inscrit aux cours collectifs ?

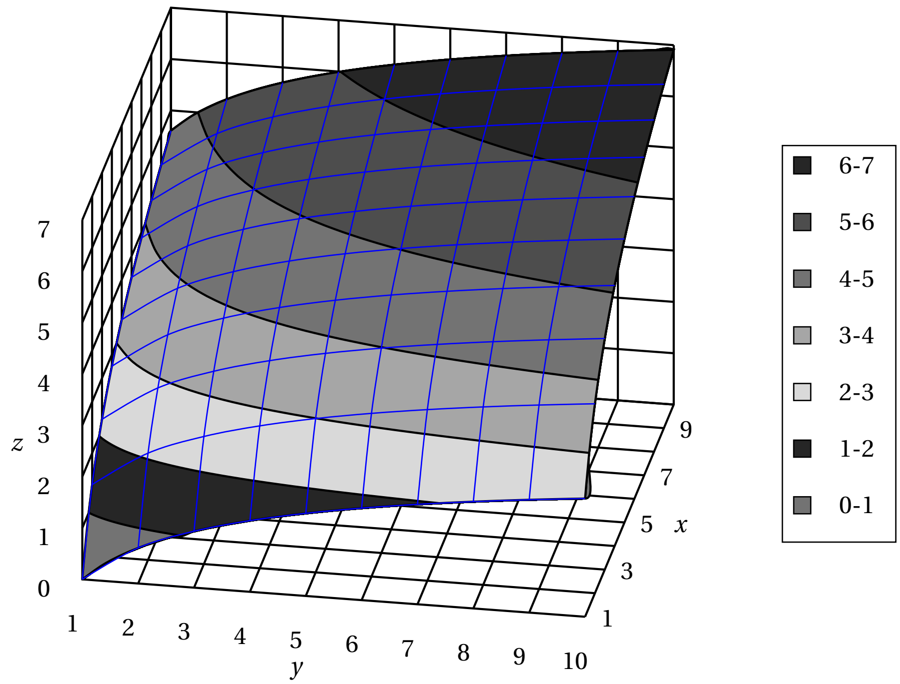
Exercice 2 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une consommatrice apprécie deux types de fruits $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. En un mois, elle achète x kilos de fruits $\mathscr{A}$ et y kilos de fruits $\mathscr{B}$; x et y appartiennent à l'intervalle $[1\,;\,10]$.

Son niveau de satisfaction est modélisé par la relation $f(x\,;\,y) = \ln y + 2\ln x$.

La figure ci-dessous représente, dans un repère orthogonal, la surface d'équation $z = f(x\,;\,y)$ pour $1 \leqslant x \leqslant 10$ et $1 \leqslant y \leqslant 10$.



1. Le point N, d'ordonnée 5 et de cote $\ln 30$, appartient à la surface. Calculer la valeur exacte de son abscisse.
2. On peut estimer que le kilo de fruits $\mathscr{A}$ coûte 3 euros et que celui de fruits $\mathscr{B}$ coûte 2 euros. La consommatrice décide de ne pas dépenser plus de 36 euros par mois pour ces fruits.
   - **a.** Donner la relation entre les quantités x et y de fruits $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ achetées pour un montant de 36 euros.
   - **b.** Montrer qu'alors le niveau de satisfaction de la consommatrice est égal à $\ln(18-1,5x)+2\ln x$.
   - **c.** Démontrer que, sur l'intervalle $[1 ; 10]$, la fonction g définie par $g(x) = \ln(18-1,5x)+2\ln x$ admet un maximuïn pour une valeur x_0 que l'on précisera.
   - **d.** Quelles quantités de fruits $\mathscr{A}$ et de fruits $\mathscr{B}$ la consommatrice doit-elle acheter dans le mois si elle veut optimiser son niveau de satisfaction tout en respectant sa contrainte de budget ?

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+8)\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

On note f' sa fonction dérivée et on admet que, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = (-0,5x-3)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Démontrer que la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(x) = (-2x-20)\mathrm{e}^{-0,5x}$ est une primitive de f sur ce même intervalle.
3. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur arrondie à 0,01 près.

Partie B : Applications économiques

La fonction de demande d'un produit informatique est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A.

Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines d'euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, à l'unité près, lorsque le prix unitaire est fixé à 200 euros.
2. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer la demande moyenne à 10 objets près, lorsque le prix unitaire est compris entre 200 et 400 euros.
3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix x est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % de x.
   On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :
   $E(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \times x$.
   a. Démontrer que $E(x) = \dfrac{-0,5x^2 - 3x}{x+8}$.
   b. Déterminer le signe de $E(x)$ sur $[0 ; +\infty[$ et interpréter ce résultat.
   c. Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à $-3,5$.
   Comment évolue la demande lorsque le prix passe de 800 à 808 euros ?

Exercice 4 **4 points**

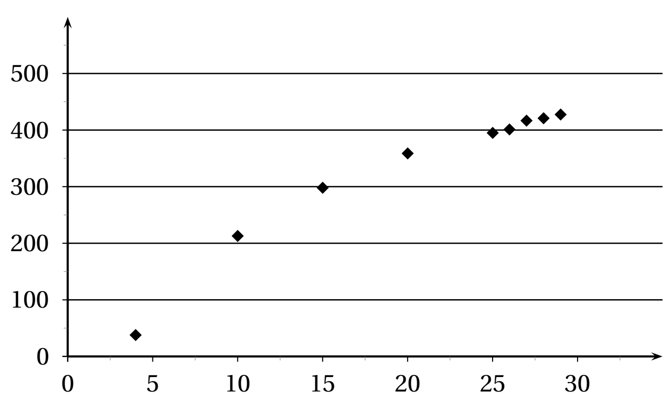
Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne la production d'électricité d'origine nucléaire en France, exprimée en milliards de kWh, entre 1979 et 2004. Les rangs des années sont calculés par rapport à l'année 1975.

Année	1979	1985	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	4	10	15	20	25	26	27	28	29
Production y_i	37,9	213,1	297,9	358,8	395,2	401,3	416,5	420,7	427,7

Source : site Internet ministère de l'industrie

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



A - Recherche d'un ajustement affine

1. Donner à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au dixième).

2. **a.** D'après cet ajustement, quelle serait la production d'électricité nucléaire en France en 2005 ?

   b. En réalité, en 2005, la production d'électricité nucléaire a été de 430 milliards de kWh. Calculer le pourcentage de l'erreur commise par rapport à la valeur réelle, arrondi à $0,1$ % près, lorsqu'on utilise la valeur fournie par l'ajustement affine.

B - Un autre modèle

Compte tenu de l'allure du nuage de points, on choisit un ajustement logarithmique et on modélise la production d'électricité nucléaire par la fonction f définie pour tout x de $[4\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 197\ln x - 237$.

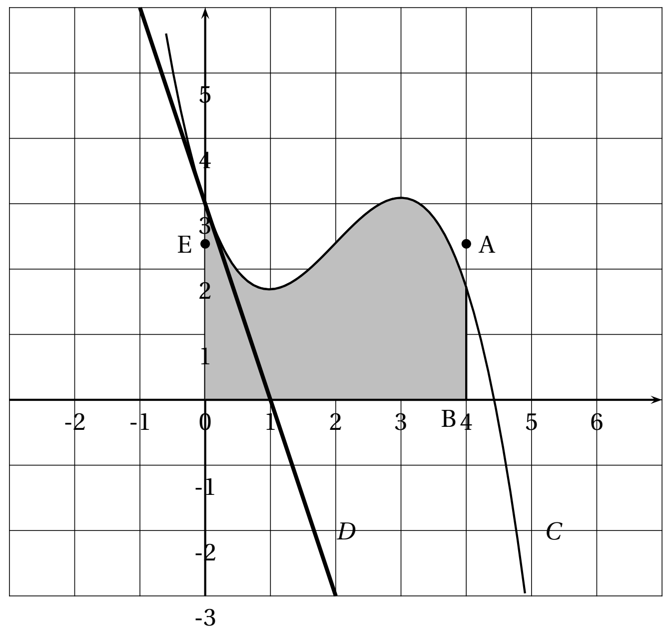
1. Calculer la production d'électricité nucléaire prévisible avec ce modèle pour l'année 2005. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
2. **a.** Résoudre dans $[4\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(x) \geqslant 460$.

   b. Avec ce modèle, en quelle année peut-on prévoir que la production d'énergie nucléaire dépassera 460 milliards de kWh ?

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats.

Le plan est muni d'un repère orthonormal. Soient f une fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et $\mathcal{C}$ sa courbe tracée ci-contre. La droite D est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
On appelle B, A et E les points de coordonnées respectives $(4~;~0)$, $\left(4~;~\dfrac{179}{75}\right)$ et $\left(0~;~\dfrac{179}{75}\right)$.
Ces trois points n'appartiennent pas à la courbe $\mathcal{C}$.



Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.*

1. L'ordonnée à l'origine de la droite D est égale à :
   • 0 • 1 •2
2. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal à :
   • $\dfrac{-1}{3}$ •5 •-3
3. Sachant que l'aire grisée sur la figure est égale à l'aire du rectangle OBAE, la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~4]$ est :
   • $\dfrac{179}{75}$ • $\dfrac{716}{75}$ • $-\dfrac{179}{75}$.
4. Sur l'intervalle $[0~;~4]$, l'équation $f'(x) = 0$
   - possède deux solutions distinctes
   - ne possède pas de solution.
   - possède une unique solution.

Exercice 2 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Un site Internet offre la possibilité à des particuliers de vendre des objets aux enchères.Pour chaque objet, la durée des enchères dure une semaine. Si une annonce reçoit une enchère, alors la vente de l'objet est obligatoire à 1a fin des enchères et ce, même si le vendeur juge le prix de vente trop peu élevé.
Sur ce site. une étude statistique a montré que :

- $\frac{3}{5}$ des annonces reçoivent une première enchère le lendemain de leur parution ; dans ce cas, 75 % des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final ;
- $\frac{1}{3}$ des annonces reçoit une première enchère au bout de trois jours et, dans ce cas, 57 % des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final de leur objet ;
- les autres annonces ne reçoivent aucune enchère et le vendeur retire alors son objet de la vente.

On choisit au hasard une annonce mise en ligne sur le site. On note :

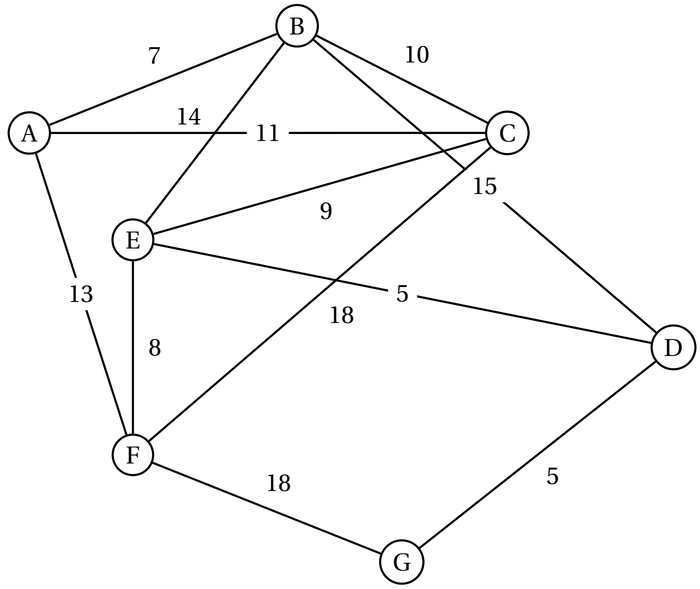
- L : l'évènement « l'annonce reçoit une première enchère le lendemain de sa parution » ;
- T : l'évènement « l'annonce reçoit une première enchère au bout de trois jours » ;
- A : l'évènement « l'annonce ne reçoit aucune enchère » ;
- S : l'évènement « le vendeur est satisfait du prix de vente final de son objet » et $\overline{S}$ son évènement contraire.

1. Traduire la situation par un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité que l'annonce ait reçu une première enchère le lendemain de sa parution et que le vendeur soit satisfait du prix de vente final.
3. Démontrer que la probabilité que le vendeur soit satisfait du prix de vente de son objet est 0,64.
4. Un objet est vendu à un prix qui satisfait son vendeur. Quelle est la probabilité que cet objet ait reçu une première enchère dès le lendemain de la parution de l'annonce (le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au centième) ?
5. Marc a mis en vente le même jour trois jeux vidéo identiques sur ce site. On suppose que les déroulements des enchères sont indépendants les uns des autres.
   Calculer la probabilité qu'à la fin des enchères, Marc soit satisfait du prix de vente d'au moins deux de ces jeux vidéo (*le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au centième*).

Exercice 2 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service.Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. la ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.
Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-contre.



1. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables. A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables. Justifier la réponse. À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.

2. On appelle M la matrice associée à ce graphe. on donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3. Sans calcul, indiquer quelle est la matrice M^3. Justifier la réponse.

b. Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

3. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A. À l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner le temps nécessaire pour l'effectuer.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats.

Le tableau ci-dessous présente l'évolution de l'indice des prix des logements anciens en Ile de France entre 2000 et 2006 (base 100 en 2000).

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6
Indice y_i des prix	100	106,3	114,3	126,1	143,6	166,3	181,5

(Source : INSEE)

On cherche à étudier l'évolution de l'indice des prix y en fonction du rang de x de l'année.

1. Calculer le taux d'évolution de cet indice entre 2000 et 2006.

2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unités graphiques :

- sur l'axe des abscisses, 2 cm pour un an ;
- sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 10 (en plaçant 100 à l'origine).

L'allure de ce nuage suggère un ajustement exponentiel.
On pose $z = \ln y$.

3. Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs de z_i seront arrondies au millième) :

Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	4,605						

4. Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.

a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*).

b. En déduire une approximation de l'indice des prix y en fonction du rang x de l'année.

5. On prend l'approximation : $y = 96\mathrm{e}^{0,104x}$ et on suppose qu'elle reste valable pour les années suivantes.

a. Déterminer le plus petit entier n tel que $96\mathrm{e}^{0,104n} \geqslant 250$.

b. Donner une interprétation du résultat obtenu.

Exercice 4 — 7 points

Commun à tous les candidats.

Le plan est muni d'un repère orthonorrnal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x + 2x^2 - 3.$$

Le tableau de variations de la fonction g est donné ci-dessous :

x	0	α	$+\infty$
g	$-\infty$	0	$+\infty$

En utilisant une calculatrice, on a obtenu $\alpha \approx 1,19$.
Dresser le tableau donnant le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x} - \ln x + 2x - 5.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

c. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x supérieur ou égal à e.
Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

4. Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

a. Calculer la dérivée h' de h.

b. En remarquant que pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :
$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2}h'(x) + 2x - 5$, trouver une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Déterminer l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \text{e}$ et $x = \text{e}^2$ (*on donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale arrondie au dixième*).