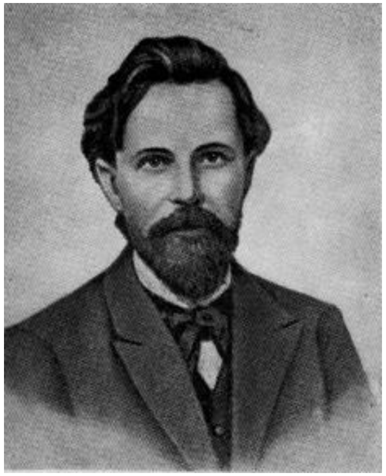
Journées APMEP Metz

Atelier P1-32 du dimanche 28 octobre 2012

Louis-Marie BONNEVAL

Chaînes de Markov au lycée



Andreï Markov (1856-1922)

Enseignement de spécialité , série S

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme.

Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif. L'étude des situations envisagées dans le cadre de cet enseignement conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche.

Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en œuvre d'algorithmes.

Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités.

Matrices et suites

Il s'agit d'étudier des exemples de processus discrets, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices. On introduit le calcul matriciel sur des matrices d'ordre 2. Les calculs sur des matrices d'ordre 3 ou plus sont essentiellement effectués à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Exemples de problèmes	Contenus
Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets. Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p . Etude du principe du calcul de la pertinence d'une page web. Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient. Modèle proie prédateur discrétisé : - évolution couplée de deux suites récurrentes ; - étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre.	• Matrices carrées, matrices colonnes : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Exemples de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. • Écriture matricielle d'un système linéaire. • Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$: - recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence ; - étude de la convergence. • Étude asymptotique d'une marche aléatoire.

B.O. Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011

Enseignement de spécialité, série ES

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme. Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif.

L'étude de telles situations conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche.

Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en œuvre d'algorithmes.

Les graphes probabilistes permettent d'étudier des phénomènes d'évolution simples et de faire un lien avec les suites. Les matrices sont présentées comme des tableaux de nombres. Au même titre que les graphes, elles apparaissent comme des outils pour résoudre des problèmes.

Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités. Les thèmes abordés ne doivent pas faire l'objet d'un développement théorique.

Exemples de problèmes	Contenus
Recherche de courbes polynomiales passant par un ensemble donné de points. Gestion de flux, problèmes simples de partitionnement de graphes sous contraintes : problème du voyageur de commerce, gestion de trafic routier ou aérien, planning de tournois sportifs, etc. Modélisation d'échanges inter-industriels (matrices de Léontief). Codage par un graphe étiqueté, applications à l'accès à un réseau informatique, reconnaissance de codes. Minimisation d'une grandeur (coût, longueur, durée, etc.). Phénomènes évolutifs (variation d'une population, propagation d'une rumeur ou d'un virus, etc.).	• Matrice carrée, matrice colonne : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, graphe connexe, chaîne eulérienne, matrice d'adjacence associée à un graphe. • Recherche du plus court chemin sur un graphe pondéré connexe. • Graphe probabiliste à deux ou trois sommets : matrice de transition, état stable d'un graphe probabiliste.

Problème 1

Bonus et malus en assurance automobile

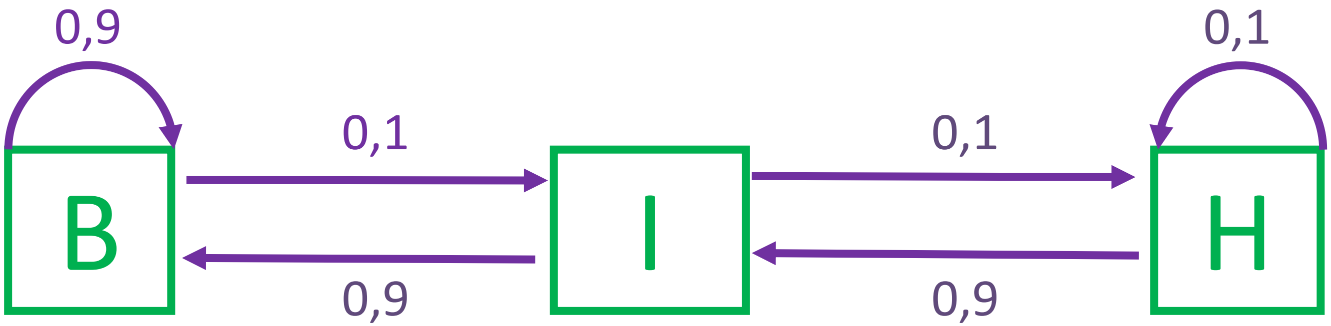
Un contrat d'assurance automobile comporte trois tarifs de cotisation annuelle : Bas, Intermédiaire, Haut.

- La première année, l'assuré paye le tarif intermédiaire.
- S'il n'a pas été responsable d'un accident pendant une année, il passe au tarif inférieur l'année suivante (s’il est déjà au tarif bas, il y reste).
- S'il a été responsable d'un accident au cours d'une année, il passe au tarif supérieur l'année suivante (s’il est déjà au tarif haut, il y reste).

La compagnie d’assurance estime à 10 % la probabilité qu'un assuré pris au hasard soit responsable d'un accident au cours d'une année.

Quelle sera à long terme la répartition des assurés entre les trois catégories de tarif ?

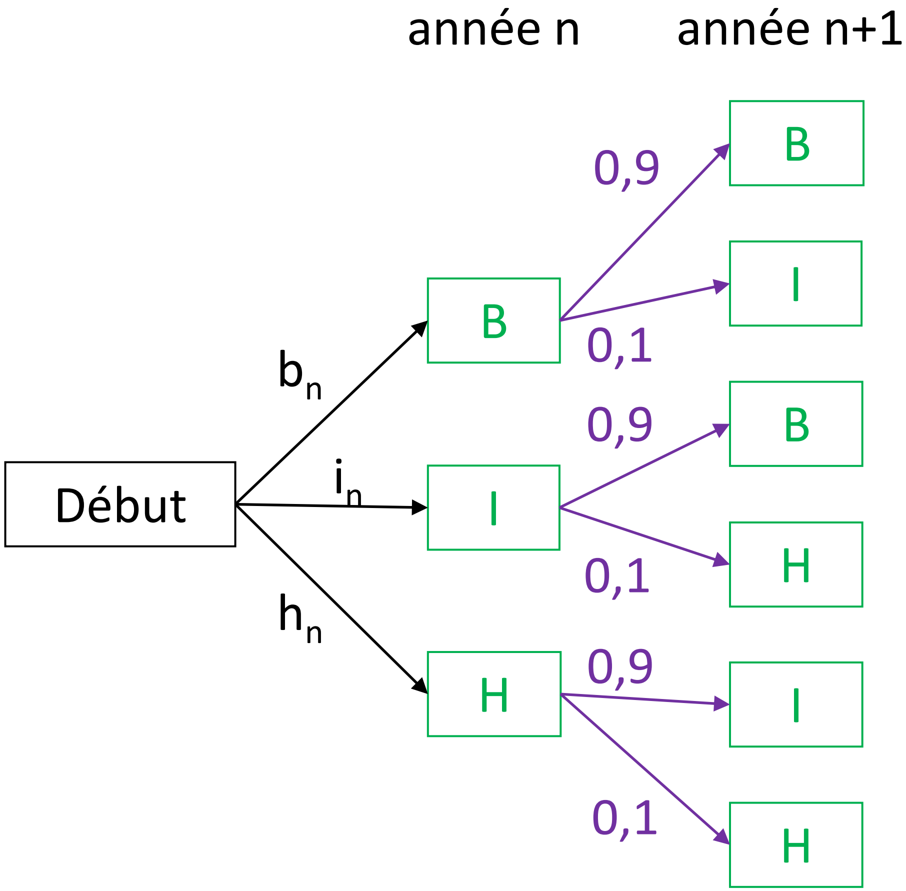
Graphe probabiliste



Notons b_n (respectivement i_n, h_n), la probabilité qu'au bout de n années un assuré pris au hasard soit au tarif bas (respectivement intermédiaire, haut).

→35

Arbre :



Donc
$$\begin{cases} b_{n+1} = 0,9b_n + 0,9i_n \\ i_{n+1} = 0,1b_n + 0,9h_n \\ h_{n+1} = 0,1i_n + 0,1h_n \end{cases}$$

Exploration au tableur ou à la calculatrice

n	bn	in	hn
0	0	1	0
1	0,9	0	0,1
2	0,810	0,180	0,010
3	0,891	0,090	0,019
4	0,883	0,106	0,011
5	0,890	0,098	0,012
6	0,889	0,100	0,011
7	0,890	0,099	0,011
8	0,890	0,099	0,011
9	0,890	0,099	0,011
10	0,890	0,099	0,011

Avec les matrices :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ i_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,9 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ i_n \\ h_n \end{pmatrix}$$

soit $\mathbf{P_{n+1} = T\,P_n}$.

Si la suite (P_n) converge vers P, alors

$$\boxed{P = TP}$$

Cherchons P = $\begin{pmatrix} b \\ i \\ h \end{pmatrix}$ tel que TP = P :

$$\begin{cases} 0,9b + 0,9i = b \\ 0,1b + 0,9h = i \\ 0,1i + 0,1h = h \end{cases}$$

De plus b + i + h = 1.

On en déduit :

$$b = \frac{81}{91} \approx 0,890, \quad i = \frac{9}{91} \approx 0,099, \quad h = \frac{1}{91} \approx 0,011$$

Remarque

On pourrait chercher des formules explicites pour b_n , i_n, h_n .
De la relation de récurrence $\mathbf{P_{n+1} = T\,P_n}$
on déduit une formule explicite : $\mathbf{P_n = T^n\,P_0}$.
Mais pour l'exploiter il faudrait expliciter $\mathbf{T}^n$.
C'est possible (valeurs propres …) mais ce n'est pas simple, et ça dépasse largement le programme.

Problème 2

Une ronde sur un triangle

Nous sommes au XIVe siècle, dans le château de Poitiers.
Il est triangulaire, flanqué d'une tour à chaque angle : Est, Nord, Sud.

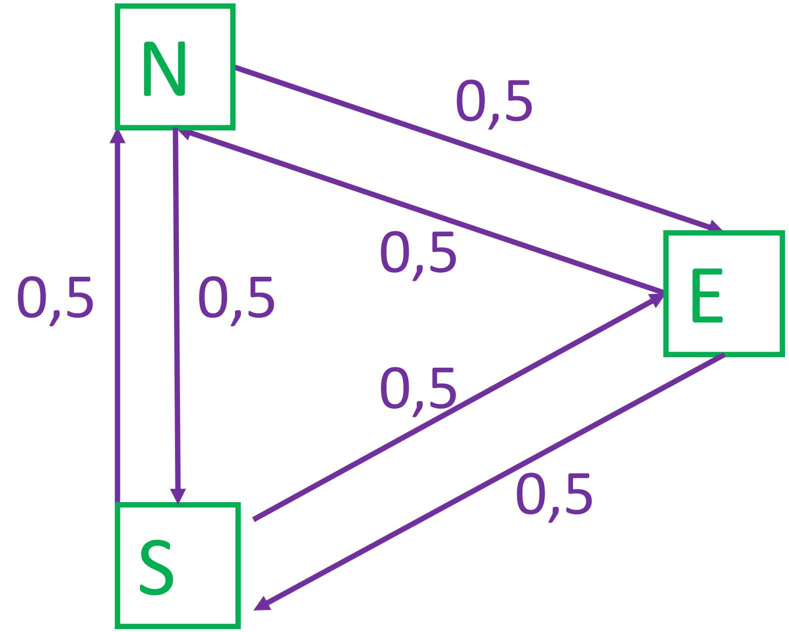
Partant de la tour Est, la sentinelle fait sa ronde sur le rempart. A chaque angle, pour tromper l'ennemi (et l'ennui), il jette une pièce :

- pile, il continue dans le même sens ;
- Face, il repart en sens inverse.

Pourra-t-il assurer une surveillance identique dans toutes les directions ?

Graphe probabiliste :

(en supposant la pièce équilibrée)

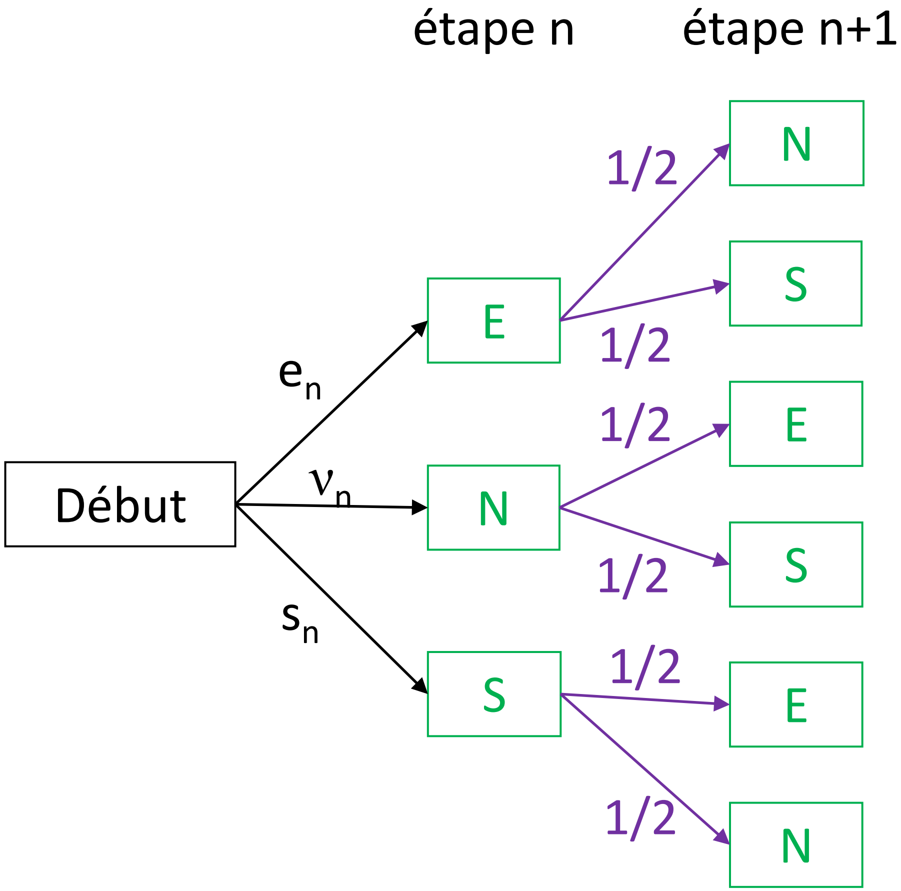


Notons e_n (respectivement ν_n, s_n), la probabilité qu'au bout de n étapes la sentinelle soit à la tour Est (respectivement Nord, Sud).

Ainsi $e_0 = 1$, $\nu_0 = 0$, $s_0 = 0$.

→35

Arbre :



Donc
$$\begin{cases} e_{n+1} = 0,5v_n + 0,5s_n \\ v_{n+1} = 0,5e_n + 0,5s_n \\ s_{n+1} = 0,5e_n + 0,5v_n \end{cases}$$

Exploration au tableur ou à la calculatrice

n	en	νn	sn
0	1	0	0
1	0	0,5	0,5
2	0,5	0,25	0,25
3	0,25	0,375	0,375
4	0,375	0,313	0,313
5	0,313	0,344	0,344
6	0,344	0,328	0,328
7	0,328	0,336	0,336
8	0,336	0,332	0,332
9	0,332	0,334	0,334
10	0,334	0,333	0,333
11	0,333	0,333	0,333
12	0,333	0,333	0,333

Avec les matrices :

$$\begin{pmatrix} e_{n+1} \\ v_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_n \\ v_n \\ s_n \end{pmatrix}$$

soit $\mathbf{P_{n+1} = T\, P_n}$.

<u>Si</u> la suite (P_n) converge vers P, alors

$$\boxed{P = TP}$$

Cherchons P = $\begin{pmatrix} e \\ v \\ s \end{pmatrix}$ tel que TP = P :

$$\begin{cases} 0,5v + 0,5s = e \\ 0,5e + 0,5s = v \\ 0,5e + 0,5v = s \end{cases}$$

De plus e + ν + s = 1.

On en déduit : $e = v = s = \frac{1}{3}$

Remarque

Ici on peut assez facilement trouver des formules explicites :

$$e_{n+1} = 0,5 v_n + 0,5 s_n = 0,5(v_n + s_n)$$

$$= 0,5(1 - e_n) = -0,5 e_n + 0,5.$$

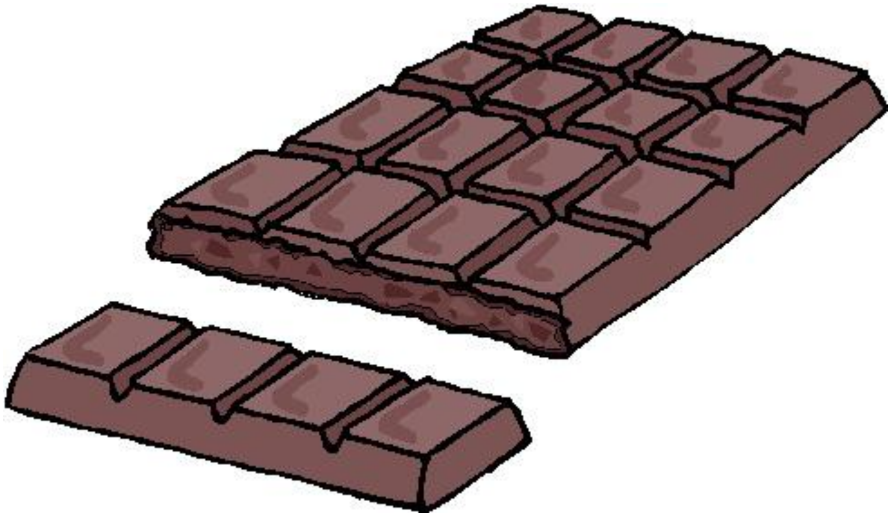
On en déduit : $e_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

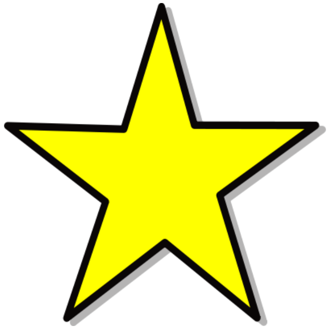
Puis : $v_n = s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$

Cela démontre la convergence.

Problème 3

Les autocollants des tablettes de chocolat



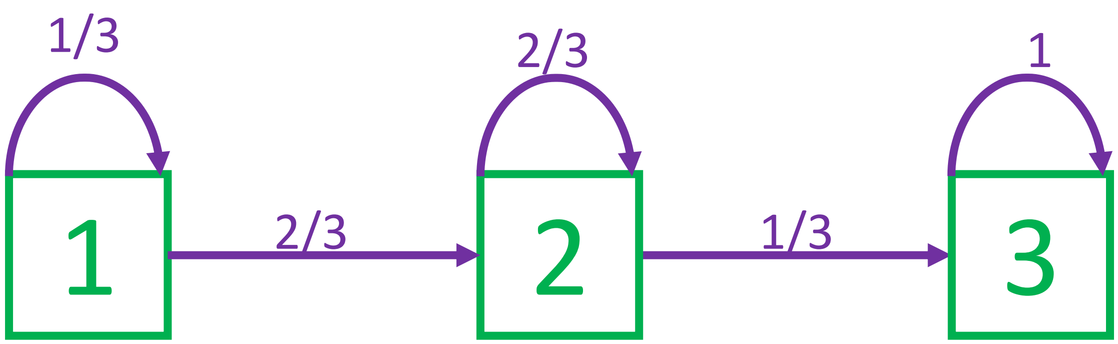


Chaque semaine, Anna achète une tablette de chocolat Cébon. Chaque tablette contient un autocollant représentant soit une étoile, soit un cœur, soit un trèfle à quatre feuilles. Anna les collectionne pour décorer son journal intime.

En supposant les trois motifs équirépartis entre les tablettes,

Combien de tablettes suffit-il d’acheter pour être sûr à plus de 95 % d’avoir les trois types de dessin ?

Graphe probabiliste

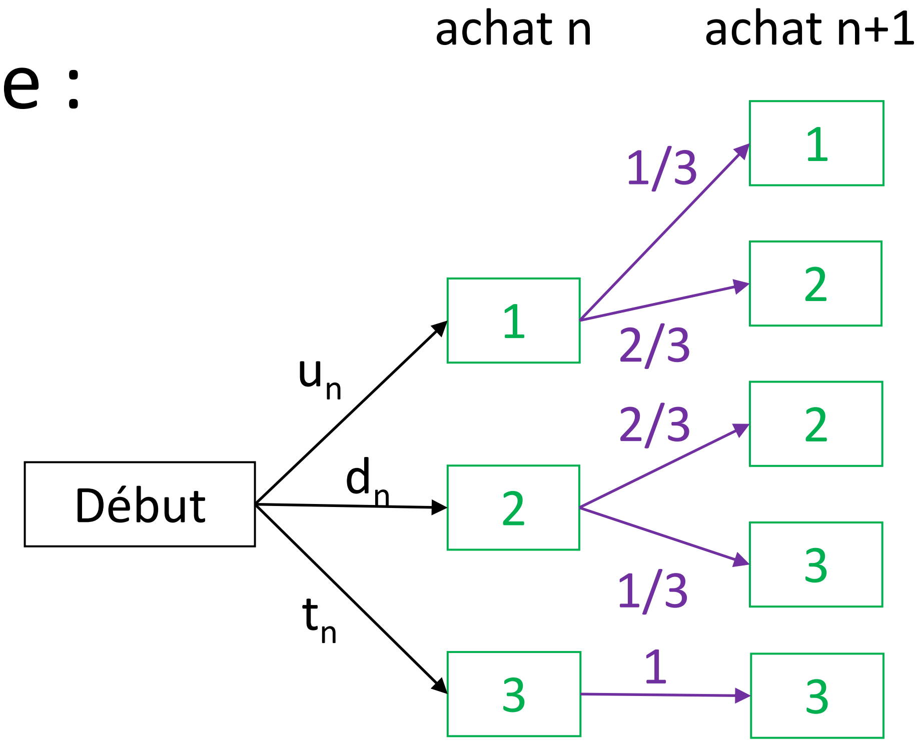


Notons respectivement u_n, d_n, t_n les probabilités qu'au bout de n achats Anna ait respectivement un seul type de dessin, deux types de dessin exactement, les trois types de dessin.

Ainsi $u_1 = 1$, $d_1 = 0$, $t_1 = 0$.

→35

Arbre :



Donc $$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n \\ d_{n+1} = \dfrac{2}{3} u_n + \dfrac{2}{3} d_n \\ t_{n+1} = \dfrac{1}{3} d_n + t_n \end{cases}$$

Exploration au tableur ou à la calculatrice

n	u_n	d_n	t_n
1	1	0	0
2	0,333	0,667	0
3	0,111	0,667	0,222
4	0,037	0,519	0,444
5	0,012	0,370	0,617
6	0,004	0,255	0,741
7	0,001	0,173	0,826
8	0,000	0,116	0,883
9	0,000	0,078	0,922
10	0,000	0,052	0,948
11	0,000	0,035	0,965
12	0,000	0,023	0,977

Avec les matrices

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ d_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$$

soit $\mathbf{P_{n+1} = T\, P_n}$.

<u>Si</u> la suite (P_n) converge vers P, alors

$$\boxed{P = TP}$$

Cherchons P = $\begin{pmatrix} u \\ d \\ t \end{pmatrix}$ tel que TP = P :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}u = u \\ \dfrac{2}{3}u + \dfrac{2}{3}d = d \\ \dfrac{1}{3}d + t = t \end{cases}$$

De plus u + d + t = 1.

On en déduit :

u = 0, d = 0, t = 1.

Ce n'est pas vraiment une surprise …

D’après la relation $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{3} d_n$, la suite $\left(t_n\right)$ est croissante, ce qui est conforme à l’intuition.

Or $t_{10} \approx 0,948 \quad et \quad t_{11} \approx 0,965$

Donc, à partir de 11 achats, on est sûr à plus de 95 % d’avoir les trois types de dessin.

Remarque

On pourrait (mais ce n’est pas immédiat) trouver des formules explicites :

$$\begin{cases} u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \\ d_n = -2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \\ t_n = 1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

Cela démontre la convergence
(mais pour notre problème on n’en a pas besoin).

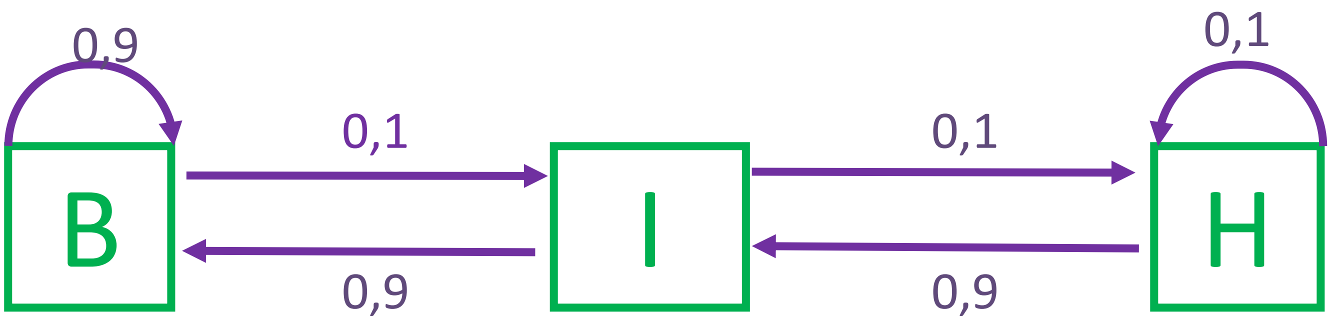
Un peu de théorie

Un processus aléatoire (processus stochastique), est une succession d'épreuves aléatoires où les issues (états possibles) – qu'on suppose en nombre fini - sont toujours les mêmes, mais où la répartition de probabilité évolue.

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire où la répartition de probabilité évolue selon des probabilités de transition constantes.

« *Le futur dépend du présent, mais pas du passé* »

On peut représenter une chaîne de Markov comme une **marche (promenade) aléatoire sur un graphe** :
- les sommets sont les états possibles,
- les flèches portent les probabilités de transition.



Pour toutes les flèches partant d'un même sommet, la somme des coefficients vaut 1.

Après avoir ordonné les états, on peut lui associer une matrice de transition T :

Les coefficients de T sont les probabilités de transition, avec la convention suivante :

•L'indice de colonne indique l'état de départ,

•l'indice de ligne indique l'état d'arrivée.

Cette convention, qui n'est pas la plus usuelle, permettra d'utiliser des matrices colonnes pour les répartitions de probabilité.

Une matrice de transition a tous ses coefficients positifs, et de somme 1 pour chaque colonne.

Si P_n est la matrice colonne indiquant la répartition de probabilité à l'étape n, le théorème des probabilités totales permet d'écrire

$$\mathbf{P_{n+1} = T\, P_n.}$$

On en déduit $\mathbf{P_n = T^n\, P_0.}$

Si on dispose d'une formule explicite pour T^n, on peut en déduire une formule explicite pour P_n.

Remarque : $P_{n+k} = T^k\, P_n$

Donc T^k est la matrice de transition pour k étapes.

Théorème de Perron-Frobenius

Georg Frobenius
(1849-1917)

Si T admet une puissance sans aucun coefficient nul, alors :

- Il existe une répartition de probabilité P *stable*, c'est-à-dire telle que TP = P, et une seule ;
- La suite (P_n) converge vers P.

Oskar Perron
(1880-1975)

Théorème de Perron-Frobenius

- Dire que T^k n'a aucun coefficient nul signifie qu'en k étapes on peut passer de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.
- L'observation du graphe peut permettre de voir si la condition est remplie (voir problème 1 et problème 2).
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire, de convergence : par exemple, dans le problème 3, cette condition n'est pas remplie, et pourtant il y a convergence.

Théorème de Perron-Frobenius

Idée de la démonstration (dans le cas où T elle-même n'a aucun coefficient nul)

Dire que TP=P signifie que P est vecteur propre de T, pour la valeur propre 1.

Or une matrice de transition (matrice *stochastique*) admet 1 comme valeur propre, et ses autres valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1.

Si aucun coefficient n'est nul, 1 est valeur propre *simple*, le sous-espace propre associé est *de dimension 1*, et les autres valeurs propres sont de module *strictement inférieur à 1*.

On en déduit (par diagonalisation ou trigonalisation) que la suite (T^n) est convergente. On démontre que sa limite T* a ses colonnes identiques.

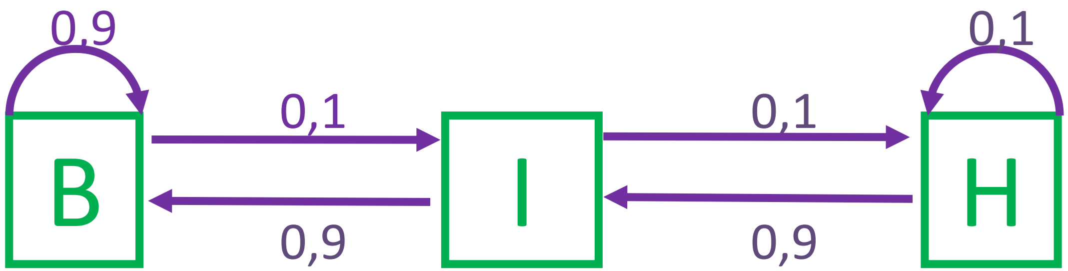
Donc la suite (P_n) converge vers une matrice P, égale à T^*P_0.

Comme $P_{n+1} = T\,P_n$ pour tout n, la matrice colonne P vérifie P = TP.

P est unique, car parmi les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, c'est celui dont la somme des coefficients vaut 1.

Donc elle ne dépend pas de P_0.

Matrices colonnes ou matrices-lignes ?



Matrices- colonnes

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ i_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ i_n \\ h_n \end{pmatrix}$$

Avantage : la matrice de transition est la matrice du système.

Matrices-lignes

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} & i_{n+1} & h_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & i_n & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Avantage : c'est la notation habituelle dans l'enseignement supérieur, et en spécialité de ES.

Mais cette double notation va poser des problèmes aux professeurs et aux rédacteurs de sujets d'examen !

Matrices colonnes ou matrices-lignes ?

Accueil > Le Bulletin officiel > Bulletin officiel > 2012 > n° 30 du 23 août 2012 > Enseignements primaire et secondaire

Enseignements primaire et secondaire

Classe terminale

Programme d'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques de la série scientifique

NOR : MENE1229561A
arrêté du 16-7-2012 - J.O. du 31-7-2012
MEN - DGESCO A3-1

Vu le code de l'éducation ; arrêté du 12-7-2011 ; avis du CSE du 28-6-2012

Article 1 - L'annexe de l'arrêté du 12 juillet 2011 susvisé est ainsi modifiée, dans la partie « Enseignement de spécialité - Matrices et suites », les mots :
« Matrices carrées, matrices colonnes : opérations. » de la colonne intitulée « Contenus » sont remplacés par les mots :
« Matrices carrées, matrices colonnes, matrices lignes : opérations.»

Problème 4

Pertinence d’une page web

Serguei Brin et Larry Page, créateurs de Google

Le réseau Internet peut être représenté comme un gigantesque graphe (non probabiliste), dont les N sommets sont les *pages*, et les flèches les *liens* qui pointent d'une page à une autre.

Un moteur de recherche, pour être utile, doit classer les pages par ordre de pertinence.

Comment mesurer la pertinence d'une page ?

L'algorithme PageRank utilisé par Google utilise pour cela une méthode probabiliste.

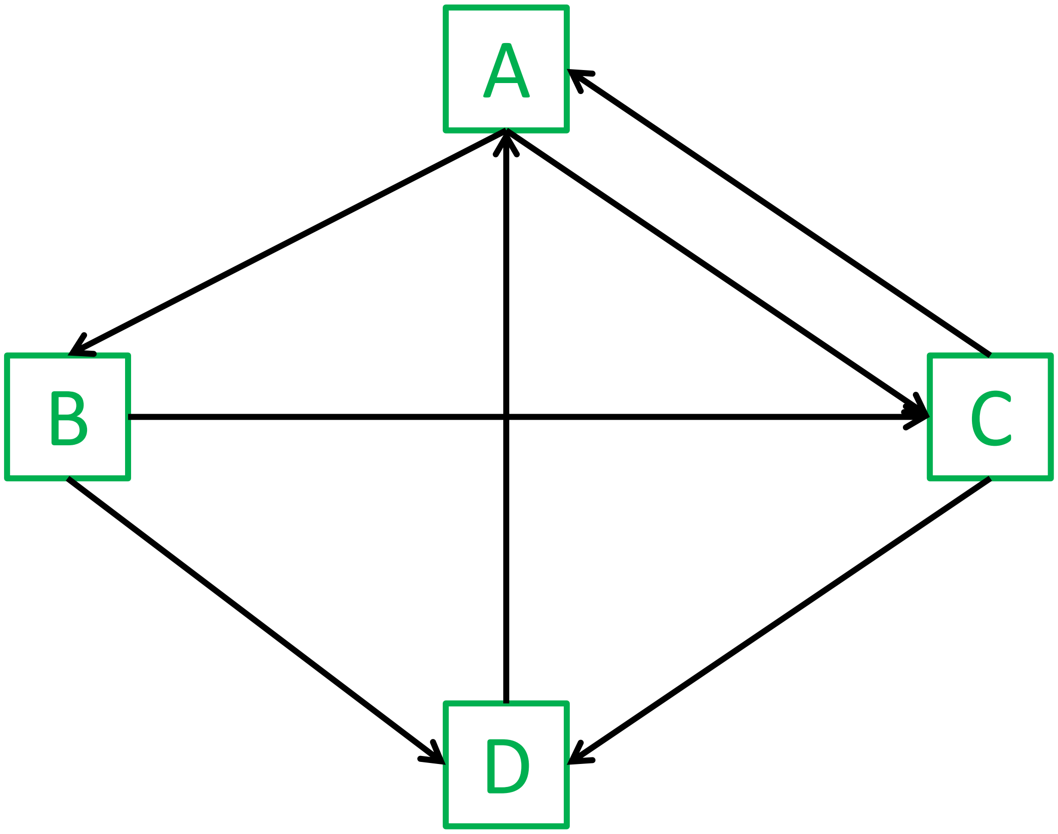
Imaginons un internaute qui « surfe » au hasard.

Quand il est sur une page,

- Soit, avec une probabilité 1-p, il clique au hasard sur l’un des liens disponibles depuis cette page ;
- Soit, avec une probabilité p, il choisit une page au hasard dans l’ensemble du réseau.

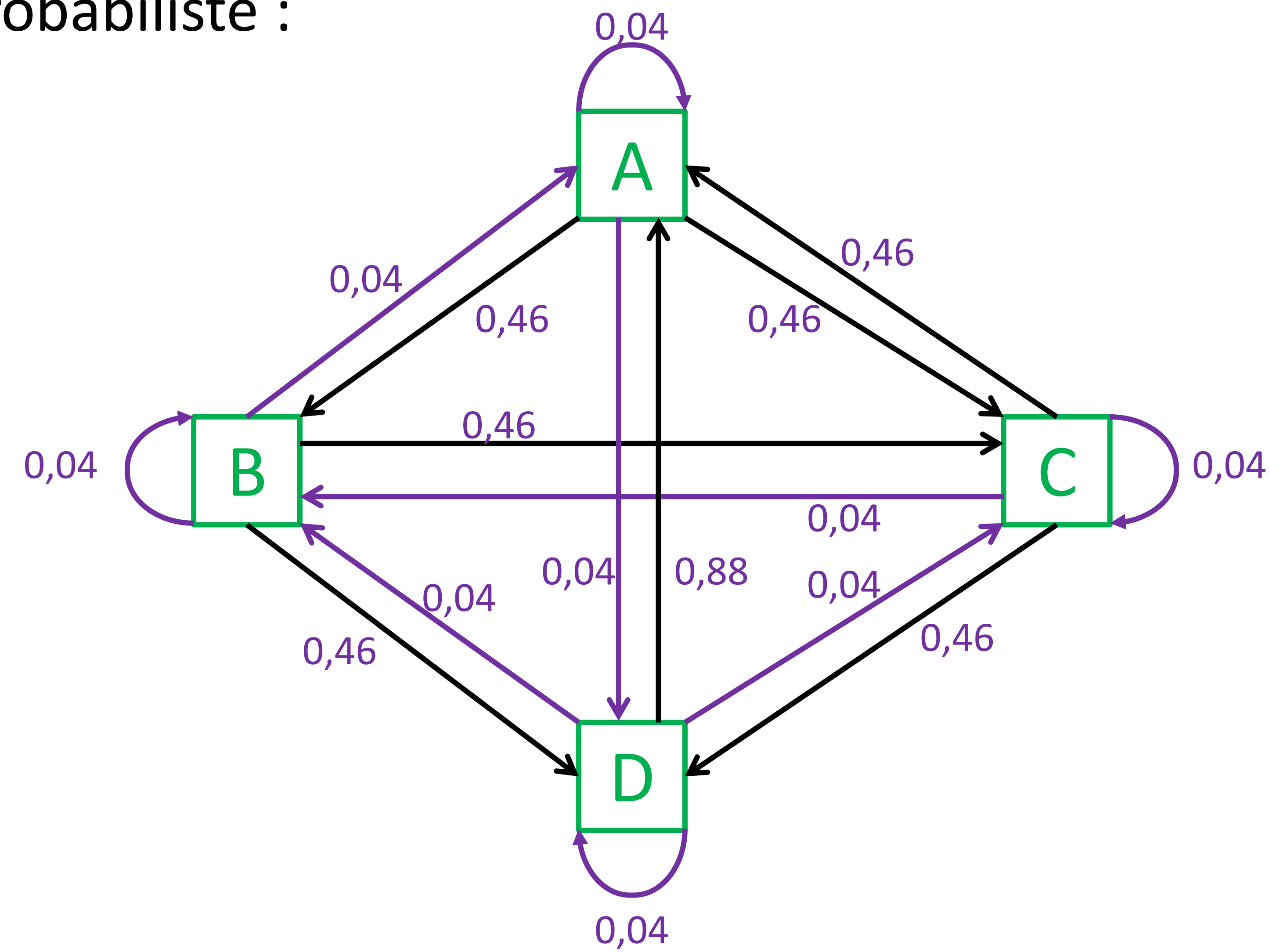
Cette deuxième possibilité permet d’assurer que toute page peut être atteinte : ainsi le théorème de Perron-Frobenius s’appliquera.

Exemple : un mini-web à 4 pages



Prenons p = 0,16.

Cela permet de transformer le graphe initial en graphe probabiliste :



Matrice de transition :

$$T = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,04 & 0,46 & 0,88 \\ 0,46 & 0,04 & 0,04 & 0,04 \\ 0,46 & 0,46 & 0,04 & 0,04 \\ 0,04 & 0,46 & 0,46 & 0,04 \end{pmatrix}$$

$$= 0,84 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} + 0,16 \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Le théorème de Perron-Frobenius s'applique.

Exploration au tableur :

n	an	bn	cn	dn
1	1	0	0	0
2	0,04	0,46	0,46	0,04
3	0,267	0,057	0,250	0,426
4	0,503	0,152	0,176	0,169
5	0,256	0,251	0,315	0,178
6	0,322	0,147	0,253	0,278
7	0,380	0,175	0,237	0,208
8	0,314	0,199	0,273	0,213
9	0,334	0,172	0,256	0,238
10	0,348	0,180	0,252	0,220
11	0,331	0,186	0,262	0,222
12	0,336	0,179	0,257	0,228
13	0,340	0,181	0,256	0,223
14	0,335	0,183	0,259	0,224
15	0,337	0,181	0,257	0,225
16	0,337	0,181	0,257	0,224
17	0,336	0,182	0,258	0,224
18	0,337	0,181	0,258	0,225
19	0,337	0,181	0,258	0,224
20	0,337	0,181	0,258	0,224

$$P_{20} \approx \begin{pmatrix} 0,337 \\ 0,181 \\ 0,258 \\ 0,224 \end{pmatrix} \approx P$$

Donc A > C > D > B

Avec une matrice T ayant plusieurs milliards de lignes et de colonnes, quelques itérations valent mieux qu'une résolution de système !

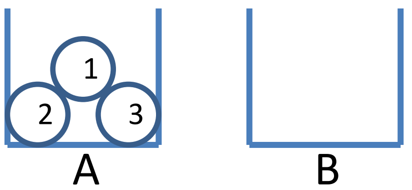
Problème 5

Les urnes d'Ehrenfest

Paul Ehrenfest (1880-1933) et Tatiana Ehrenfest (1876-1964)
ont voulu modéliser la diffusion d'un gaz d'une enceinte à une autre

On dispose de deux urnes A et B, et de N boules numérotées de 1 à N.

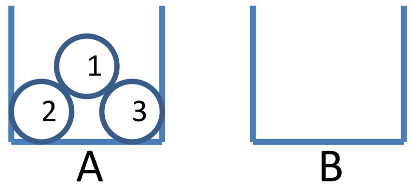


Au début, toutes les boules sont dans l'urne A.

A intervalles réguliers, on tire au hasard un numéro entre 1 et N, et *on change d'urne* la boule correspondante.

Au bout de combien d'étapes peut-on espérer que toutes les boules soient à nouveau dans l'urne A ?

Etudions le cas où **N = 3**.



Pour décrire la répartition des boules entre les deux urnes, il suffit d'étudier le **contenu de l'urne A**.

Notons z_n (respectivement u_n, d_n, t_n) les probabilités qu'à la n-ème étape l'urne A contienne 0 boule (respectivement 1 boule, 2 boules, 3 boules).

Graphe probabiliste :

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{0} \arrow[r, shift left, "1"] & \boxed{1} \arrow[l, shift left, "1/3"] \arrow[r, shift left, "2/3"] & \boxed{2} \arrow[l, shift left, "2/3"] \arrow[r, shift left, "1/3"] & \boxed{3} \arrow[l, shift left, "1"]
\end{tikzcd}
$$

Matrice de transition : $$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Répartition stable : $$\begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/8 \\ 3/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$ = loi binomiale $\mathscr{B}(3, ½)$

En fait le processus ne converge pas, pour une raison de parité du nombre de boules dans A : ainsi de $t_0 = 1$ on déduit que $t_n = 0$ pour tout n impair.

Néanmoins le dernier coefficient de P, égal à 1/8, peut s'interpréter ainsi : sur un grand nombre d'étapes, le système est dans l'état 3 en moyenne une fois sur 8.
Autrement dit il y a en moyenne 8 étapes entre deux passages successifs dans l'état 3.
Donc le nombre d'étapes jusqu'au retour à l'état initial a pour espérance 8.

Dans le **cas général de N boules**, la répartition stable est la loi binomiale $\mathcal{B}(N,½)$, donc le dernier coefficient de P est $1/2^N$.

Son inverse 2^N est l'espérance du nombre d'étapes jusqu'au premier retour à l'état initial (N boules dans A).

S'il s'agit de molécules de gaz, N est de l'ordre du nombre d'Avogadro, donc 2^N est gigantesque. En pratique on n'observe pas de retour à l'état initial.

Quelques domaines d’application

- Linguistique (cf. l’étude de Markov)
- Physique statistique : mouvement brownien, cinétique des gaz (pb 5), mécanique quantique
- Génétique : évolution génétique, décryptage du génome
- Assurance (pb 1)
- Intelligence artificielle : reconnaissance de formes, de sons

Quelques questions pédagogiques

- Comparaison entre S et ES
- Combien d'états ?
- Trop ambitieux ?
- Matrices colonnes ou matrices lignes ?
- Une formule explicite pour T^n ?