# Polynômes du second degré

1. Equation du $2^{nd}$ degré
   a. La forme générale d'une équation du $2^{nd}$ degré est :
   $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$
   *exemples* : $3x^2 - 5x + 2 = 0$ où $a = 3$ ; $b = -5$ et $c = 2$
   $-4x^2 + 7 = 0$ où $a = -4$ ; $b = 0$ et $c = 7$

   b. Le nombre de solutions d'une équation du $2^{nd}$ degré dépend de la valeur d'un nombre $\Delta$ appelé discriminant et tel que $\Delta = b^2 - 4\,ac$.
   On distingue 3 cas en fonction de la valeur de $\Delta$
   - Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes :
     $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
   - Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double :
     $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$
   - Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

   c. Exemples :
   - $2x^2 - 5x - 3 = 0$
     $\Delta = (-5)^2 - 4(2 \times (-3)) = 25 + 24 = 49 = 7^2$
     $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :
     $x_1 = \dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 2} = \dfrac{5+7}{4} = 3$ ; $x_2 = \dfrac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\dfrac{1}{2}$
     *Vérifications* : $2 \times (3)^2 - 5 \times 3 - 3 = 18 - 15 - 3 = 0$
     $2 \times (-0{,}5)^2 - 5 \times (-0{,}5) - 3 = 0{,}25 + 2{,}75 - 3 = 0$

   - $x^2 - 4x + 5 = 0$
     $\Delta = (-4)^2 - 4(1 \times 5) = 16 - 20 = -4$
     $\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution

   - $9x^2 + 6x + 1 = 0$
     $\Delta = 6^2 - 4(9 \times 1) = 36 - 36 = 0$
     $\Delta = 0$, l'équation a une solution double :
     $x_1 = x_2 = -\dfrac{6}{2\times 9} = -\dfrac{6}{18} = -\dfrac{1}{3}$
     *Vérification* : $9\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + 6\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

2. Factorisation d'un polynôme du $2^{nd}$ degré
   a. Soit un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.
   Factoriser ce polynôme revient à l'écrire sous la forme d'un produit de polynômes du $1^{er}$ degré. Pour ce faire, il faut rechercher les solutions de l'équation $P(x) = 0$ en calculant le discriminant $\Delta$.
   - Si $\Delta > 0$, le polynôme peut s'écrire $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1$ et $x_2$ sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$

- Si $\Delta = 0$, le polynôme peut s'écrire $P(x) = a(x - x_1)^2$ où $x_1$ est la solution double de l'équation $P(x) = 0$

- Si $\Delta < 0$, la factorisation du polynôme $P(x)$ est impossible

b. Exemple : Factorisation de $P(x) = 5x^2 + 5x - 10$

$\Delta = 5^2 - 4(5 \times -10) = 25 + 200 = 225$

$\Delta > 0$ donc il existe 2 solutions à l'équation $P(x) = 0$

Ces 2 solutions sont :

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{225}}{10} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-5-\sqrt{225}}{10} = -2$$

La factorisation de $P(x)$ est donc :

$P(x) = 5(x - 1)(x + 2)$

3. Signe d'un polynôme du 2nd degré

Pour déterminer le signe d'un polynôme du 2nd degré $P(x) = ax^2 + bx + c$, on factorise ce polynôme sous la forme $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1$ et $x_2$ sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$ et on étudie dans un tableau le signe de $(x - x_1)$ et de $(x - x_2)$ en fonction des valeurs de $x$.

Exemple : étude du signe du polynôme $A(x) = x^2 + 4x - 21$ sur l'intervalle $]-10 ; 10[$

- Recherche du discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times -21 = 16 + 84 = 100$
- $\Delta > 0$ donc il existe 2 solutions à l'équation $P(x) = 0$

  Ces 2 solutions sont :

  $$x_1 = \frac{-4+\sqrt{100}}{2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-4-\sqrt{100}}{2} = -7$$
- La forme factorisée de $A(x)$ est : $A(x) = (x - 3)(x + 7)$
- Tableau de signes de $A(x)$ :

| $x$ | $-10$ | | $-7$ | | $3$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x + 7$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $A(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Remarque : dans le cas où le polynôme $P(x)$ a une racine ou aucune racine, son signe est celui de $a$.

Exemple : $B(x) = -2x^2 + 4x - 3$

- Recherche du discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4\times(-2)\times(-3) = -8$
- $\Delta < 0$ : $B(x)$ est toujours négatif car $a = -2$.