Python, probabilités & chaînes de Markov

Les 5 kiwis verts

Une coupe de fruits contient 5 kiwis verts.

Chaque jour, on tire au hasard un kiwi de la coupe puis on le remplace par un kiwi jaune. On souhaite étudier à quel moment tous les kiwis de la coupe auront été remplacés par des kiwis jaunes.

Il s'agit de répondre aux deux questions suivantes :

Question Q1 :

Déterminer le nombre de jours tel que la probabilité que tous les kiwis verts (V) soient remplacés par des kiwis jaunes (J) soit supérieure à 99 %

Question Q2 :

Quel est le temps moyen (nombre moyen de jours) pour remplacer tous les kiwis verts (V) par des kiwis jaunes (J) ?

Dessin : José OUIN

Question Q1 :

Déterminer le nombre de jours tel que la probabilité que tous les kiwis verts (V) soient remplacés par des kiwis jaunes (J) soit supérieure à 99 %

On calcule F(n), la probabilité de l'évènement : "On obtient 0 kiwis verts (V) au bout du n jours"

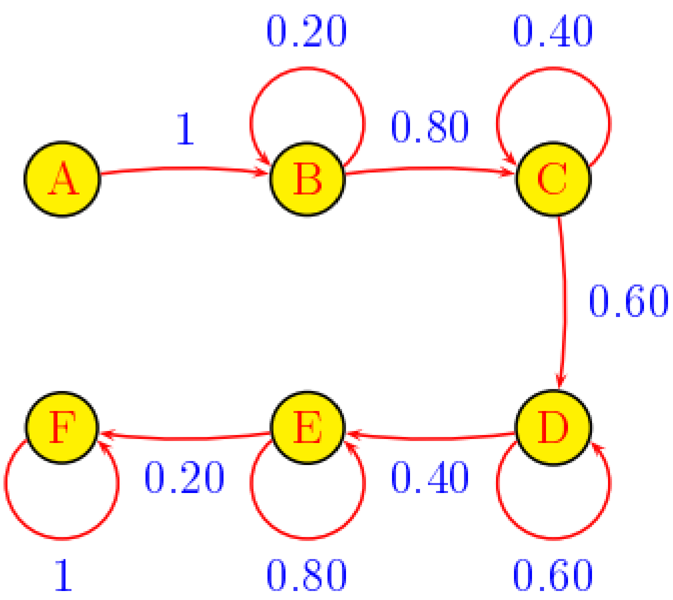
Soient les probabilités des évènements A, B, C , D, E et F dont les définitions sont les suivantes :
A(n) : "Probabilité d'obtenir 5 kiwis verts (V) au bout de n jours"
B(n) : "Probabilité d'obtenir 4 kiwis verts (V) au bout de n jours"
C(n) : "Probabilité d'obtenir 3 kiwis verts (V) au bout de n jours"
D(n) : "Probabilité d'obtenir 2 kiwis verts (V) au bout de n jours"
E(n) : "Probabilité d'obtenir 1 kiwis verts (V) au bout de n jours"
F(n) : "Probabilité d'obtenir 0 kiwis verts (V) au bout de n jours"

Les valeurs initiales sont les suivantes :
A(0) = 1, B(0) = 0 , C(0) = 0, D(0) = 0, E(0) = 0 et F(0) = 0

On a les relations de récurrence suivantes :

A(n+1) = 0*A(n)
B(n+1) = 1/5*B(n) + A(n)
C(n+1) = 2/5*C(n) +4/5*B(n)
D(n+1) = 3/5*D(n) + 3/5*C(n)
E(n+1) = 4/5*E(n) + 2/5*D(n)
F(n+1) = F(n) + 1/5*E(n)

On dessine la chaîne de Markov correspondante :



On en déduit la matrice de transition :

$$X_{n+1} = K * X_n \text{ avec : } K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = K^n * X_0 \text{ avec : } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le programme Python

```
import numpy as np

def MIteration(n) :
    P = np.array([[1],[0],[0],[0],[0],[0]])
    for k in range(n) :
        P = M.dot(P)
    return P

M = np.array([[0,0,0,0,0,0],[1,0.2,0,0,0,0],[0,0.8,0.4,0,0,0], \
              [0,0,0.6,0.6,0,0],[0,0,0,0.4,0.8,0],[0,0,0,0,0.2,1]])
P = np.array([[1],[0],[0],[0],[0],[0]])

T = 0

while P[5,0] < 0.99 :
    P = M.dot(P)
    T = T + 1

print("P(F) > 0.99 pour j = ", T, " jours.")
print("P(F) = ",P[5,0])
```

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
P(F) > 0.99 pour j =  28  jours.
P(F) =  0.9903347343132399
```

A partir du **28ième jour**, la probabilité que tous les kiwis verts (V) soient remplacés par des kiwis jaunes (J) est supérieure à 99 %

Quelques valeurs du vecteur colonne X :

Par exemple pour n = 5 , MIteration(5) donne **0,0384** pour la dernière ligne du vecteur X, ce qui signifie que la probabilité de ne plus avoir de kiwis verts (V) en seulement 5 jours est égale à 0,0384

```
>>> MIteration(5)
array([[0.    ],
       [0.0016],
       [0.096 ],
       [0.48  ],
       [0.384 ],
       [0.0384]])

>>> MIteration(28)
array([[0.00000000e+00],
       [1.34217728e-19],
       [7.20575935e-11],
       [6.14072604e-06],
       [9.65912489e-03],
       [9.90334734e-01]])

>>> MIteration(27)
array([[0.00000000e+00],
       [6.71088640e-19],
       [1.80143982e-10],
       [1.02343633e-05],
       [1.20687889e-02],
       [9.87920977e-01]])

>>> MIteration(29)
array([[0.00000000e+00],
       [2.68435456e-20],
       [2.88230375e-11],
       [3.68447886e-06],
       [7.72975620e-03],
       [9.92266559e-01]])
```

Question Q2 :

Quel est le temps moyen (nombre moyen de jours) pour remplacer tous les kiwis verts (V) par des kiwis jaunes (J) ?

On écrit un programme Python permettant d'approcher la solution.

On note (E) l'expérience aléatoire qui consiste à :

- tirer un kiwi au hasard tant que tous les kiwis verts (V) n'ont pas été tirés ;
- noter le nombre p de tirages qui ont été nécessaires.

On répète N fois l'expérience (E) :

1/ Calcul de N_k : On somme l'ensemble des jours nécessaires pour chaque expérience (E) et on obtient N_k le nombre total de tirages (jours) qui ont été nécessaires (**N_k > N**). Le nombre moyen de jours, Nm, est égal à : N_k/N.

2/ Calcul des N_j : On stocke dans N_j[**i**] le nombre de fois que l'expérience (E) a été réalisée en **i** jours.

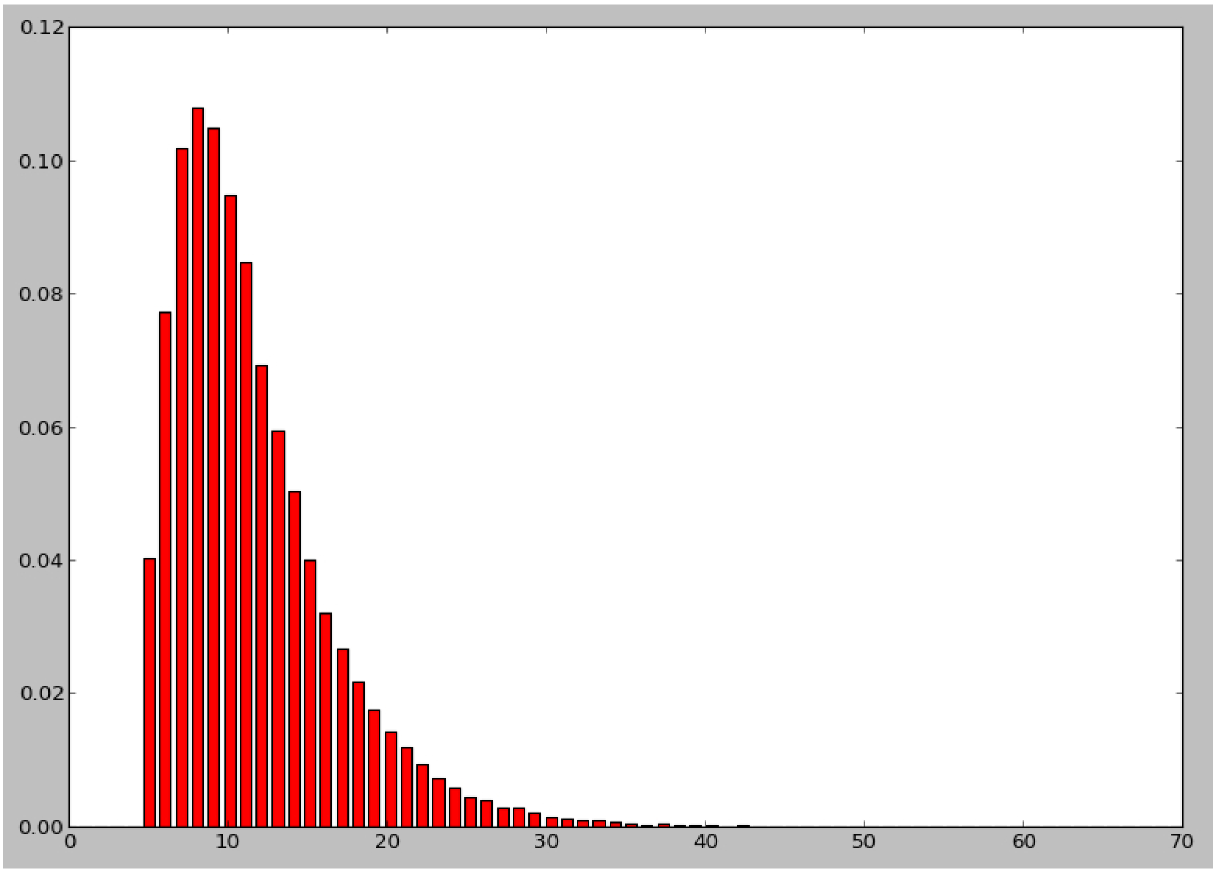
Le programme Python

```
import numpy as np
from random import *
import matplotlib.pyplot as plt

N = 70000
Nk = 0
Nj = [0]*101
Ni = np.linspace(0,100,101)

for i in range(1,N+1) :
    K = [1]*5
    p = 0
    while sum(K) != 0 :
        p = p + 1
        j = randint(1,5)
        if K[j-1] == 1 :
            K[j-1] = 0

    Nk = Nk + p
    if p < 101 :
        Nj[p] = Nj[p] + 1

print("Nombre moyen Nm = ",Nk/N)
FNj = [u/N for u in Nj]
plt.bar(Ni,FNj,align ='center', width = 0.7, color = 'r')
plt.show()
```

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
Nombre moyen Nm =  11.409771428571428
```

Il faut en moyenne **11,4 jours** pour remplacer tous les kiwis verts par des kiwis jaunes.

Graphique :



En abscisse : le nombre de jours pour réaliser (E) (donc tirer les 5 kiwis verts (V)).

En ordonnée : la fréquence N_j[**i**]/N pour chaque nombre de jours **i** en abscisse. Il s'agit donc de la fréquence de la réalisation de (E) en **i** jours.

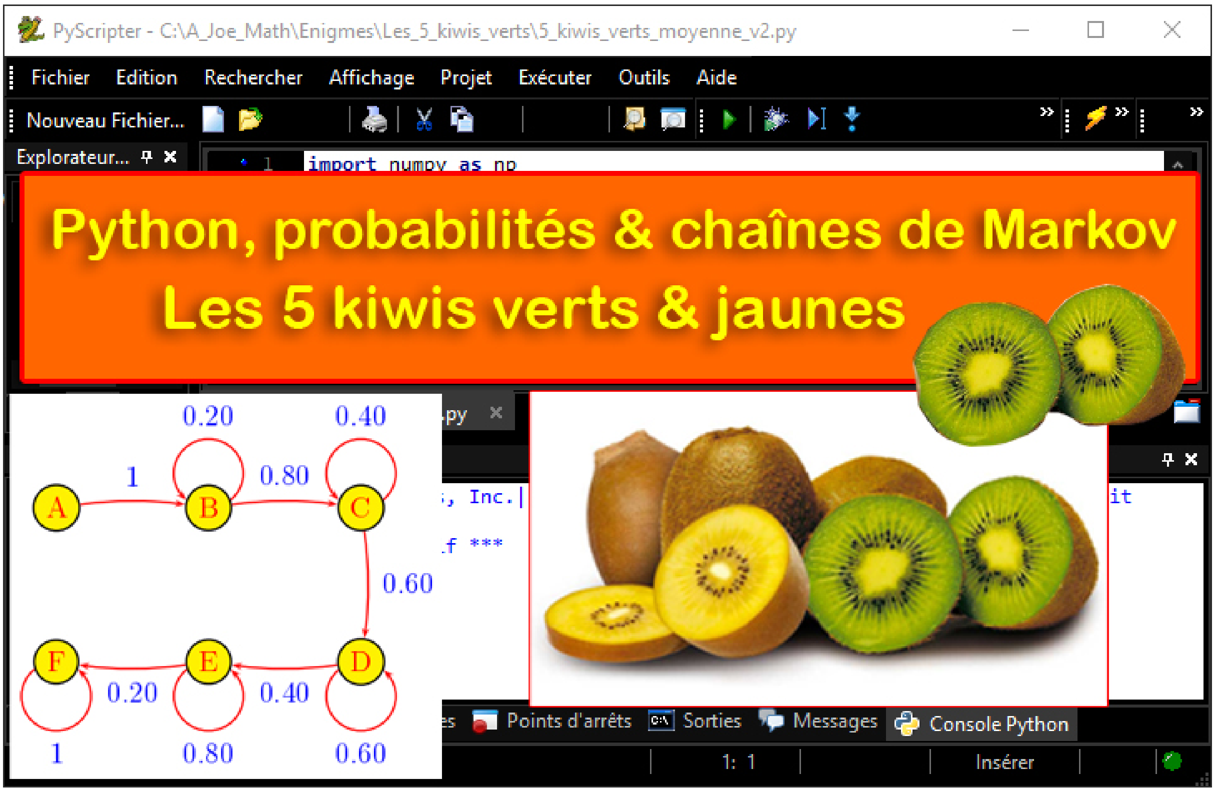
On remarque qu'au-delà de 50 jours, on peut considérer que tous les kiwis verts ont été remplacés.

A l'abscisse 5 (5 jours), on obtient bien une valeur proche de 0,038.

Pour N = 70000 :

```
>>> Nj[5]/70000
0.03887142857142857
>>>
```

Vidéo Youtube : https://youtu.be/GZEKowvjsy0



A propos des tutoriels

Site Internet :

Le site Internet http://www.joseouin.fr propose un ensemble de tutoriels vidéo portant sur différents domaines : Excel, Word, Libre Office, LMS Claroline, Mathématiques, Geogebra, Python, Scilab, Visual Basic, Photofiltre, CMS Joomla, Ubuntu, Windows & Autres. De nouveaux tutoriels sont régulièrement mis en ligne.

Chaîne Youtube :

Toutes les vidéos sont hébergées sur la chaîne Youtube « Mathématiques Magiques » :
https://www.youtube.com/c/MathematiquesMagiques

Pensez à vous abonner et cliquez sur le petit pouce bleu de la vidéo qui vous avez visionnée si le contenu vous a convenu. Merci à vous.

J'espère que ce tutoriel vous rendra service.

José OUIN.