

## Python, probabilités & chaînes de Markov

### Les 5 kiwis verts



Une coupe de fruits contient 5 kiwis verts.

Chaque jour, on tire au hasard un kiwi de la coupe puis on le remplace par un kiwi jaune. On souhaite étudier à quel moment tous les kiwis de la coupe auront été remplacés par des kiwis jaunes.

Il s'agit de répondre aux deux questions suivantes :

#### Question Q1 :

Déterminer le nombre de jours tel que la probabilité que tous les kiwis verts (V) soient remplacés par des kiwis jaunes (J) soit supérieure à 99 %

#### Question Q2 :

Quel est le temps moyen (nombre moyen de jours) pour remplacer tous les kiwis verts (V) par des kiwis jaunes (J) ?



Dessin : José OUIN

**Question Q1 :**

Déterminer le nombre de jours tel que la probabilité que tous les kiwis verts (V) soient remplacés par des kiwis jaunes (J) soit supérieure à 99 %

On calcule  $F(n)$ , la probabilité de l'évènement : "On obtient 0 kiwis verts (V) au bout du n jours"

Soient les probabilités des évènements A, B, C, D, E et F dont les définitions sont les suivantes :

A(n) : "Probabilité d'obtenir 5 kiwis verts (V) au bout de n jours"

B(n) : "Probabilité d'obtenir 4 kiwis verts (V) au bout de n jours"

C(n) : "Probabilité d'obtenir 3 kiwis verts (V) au bout de n jours"

D(n) : "Probabilité d'obtenir 2 kiwis verts (V) au bout de n jours"

E(n) : "Probabilité d'obtenir 1 kiwis verts (V) au bout de n jours"

F(n) : "Probabilité d'obtenir 0 kiwis verts (V) au bout de n jours"

Les valeurs initiales sont les suivantes :

$A(0) = 1, B(0) = 0, C(0) = 0, D(0) = 0, E(0) = 0$  et  $F(0) = 0$

On a les relations de récurrence suivantes :

$$A(n+1) = 0 \cdot A(n)$$

$$B(n+1) = \frac{1}{5} \cdot B(n) + A(n)$$

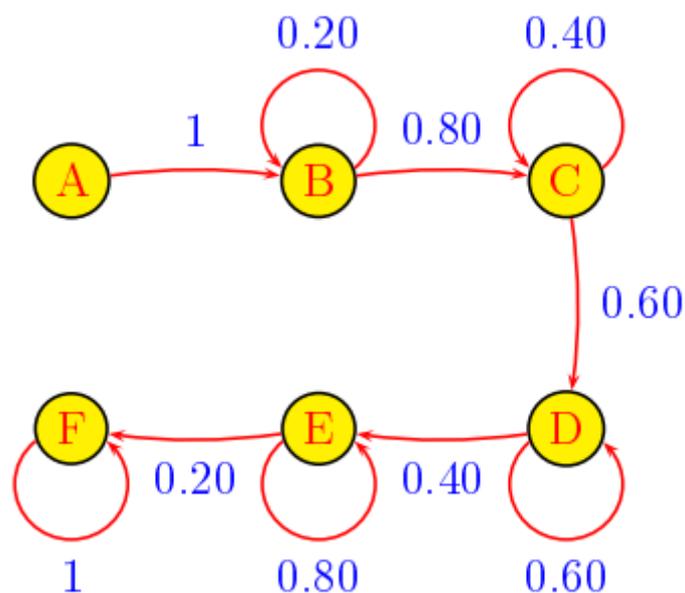
$$C(n+1) = \frac{2}{5} \cdot C(n) + \frac{4}{5} \cdot B(n)$$

$$D(n+1) = \frac{3}{5} \cdot D(n) + \frac{3}{5} \cdot C(n)$$

$$E(n+1) = \frac{4}{5} \cdot E(n) + \frac{2}{5} \cdot D(n)$$

$$F(n+1) = F(n) + \frac{1}{5} \cdot E(n)$$

On dessine la chaîne de Markov correspondante :



On en déduit la matrice de transition :

$$X_{n+1} = K * X_n \text{ avec : } K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = K^n * X_0 \text{ avec : } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Le programme Python

```
import numpy as np

def MIteration(n) :
    P = np.array([[1], [0], [0], [0], [0], [0]])
    for k in range(n) :
        P = M.dot(P)
    return P

M = np.array([[0,0,0,0,0,0], [1,0.2,0,0,0,0], [0,0.8,0.4,0,0,0], \
              [0,0,0.6,0.6,0,0], [0,0,0,0.4,0.8,0], [0,0,0,0,0.2,1]])
P = np.array([[1], [0], [0], [0], [0], [0]])

T = 0

while P[5,0] < 0.99 :
    P = M.dot(P)
    T = T + 1

print("P(F) > 0.99 pour j = ", T, " jours.")
print("P(F) = ", P[5,0])
```

**\*\*\* Console de processus distant Réinitialisée \*\*\***

```
>>>
P(F) > 0.99 pour j = 28 jours.
P(F) = 0.9903347343132399
```

A partir du **28<sup>ième</sup> jour**, la probabilité que tous les kiwis verts (V) soient remplacés par des kiwis jaunes (J) est supérieure à 99 %

**Quelques valeurs du vecteur colonne X :**

Par exemple pour  $n = 5$ , `MIteration(5)` donne **0,0384** pour la dernière ligne du vecteur X, ce qui signifie que la probabilité de ne plus avoir de kiwis verts (V) en seulement 5 jours est égale à 0,0384

```
>>> MIteration(5)
array([[0.      ],
       [0.0016],
       [0.096  ],
       [0.48   ],
       [0.384  ],
       [0.0384]])
```

```
>>> MIteration(28)
array([[0.00000000e+00],
       [1.34217728e-19],
       [7.20575935e-11],
       [6.14072604e-06],
       [9.65912489e-03],
       [9.90334734e-01]])
```

```
>>> MIteration(27)
array([[0.00000000e+00],
       [6.71088640e-19],
       [1.80143982e-10],
       [1.02343633e-05],
       [1.20687889e-02],
       [9.87920977e-01]])
```

```
>>> MIteration(29)
array([[0.00000000e+00],
       [2.68435456e-20],
       [2.88230375e-11],
       [3.68447886e-06],
       [7.72975620e-03],
       [9.92266559e-01]])
```

**Question Q2 :**

Quel est le temps moyen (nombre moyen de jours) pour remplacer tous les kiwis verts (V) par des kiwis jaunes (J) ?

On écrit un programme Python permettant d'approcher la solution.

**On note (E) l'expérience aléatoire qui consiste à :**

- tirer un kiwi au hasard tant que tous les kiwis verts (V) n'ont pas été tirés ;
- noter le nombre  $p$  de tirages qui ont été nécessaires.

**On répète  $N$  fois l'expérience (E) :**

1/ Calcul de  $N_k$  : On somme l'ensemble des jours nécessaires pour chaque expérience (E) et on obtient  $N_k$  le nombre total de tirages (jours) qui ont été nécessaires ( $N_k > N$ ). Le nombre moyen de jours,  $N_m$ , est égal à :  $N_k/N$ .

2/ Calcul des  $N_j$  : On stocke dans  $N_j[i]$  le nombre de fois que l'expérience (E) a été réalisée en  $i$  jours.

**Le programme Python**

```
import numpy as np
from random import *
import matplotlib.pyplot as plt

N = 70000
Nk = 0
Nj = [0]*101
Ni = np.linspace(0,100,101)

for i in range(1,N+1) :
    K = [1]*5
    p = 0
    while sum(K) != 0 :
        p = p + 1
        j = randint(1,5)
        if K[j-1] == 1 :
            K[j-1] = 0

    Nk = Nk + p
    if p < 101 :
        Nj[p] = Nj[p] + 1

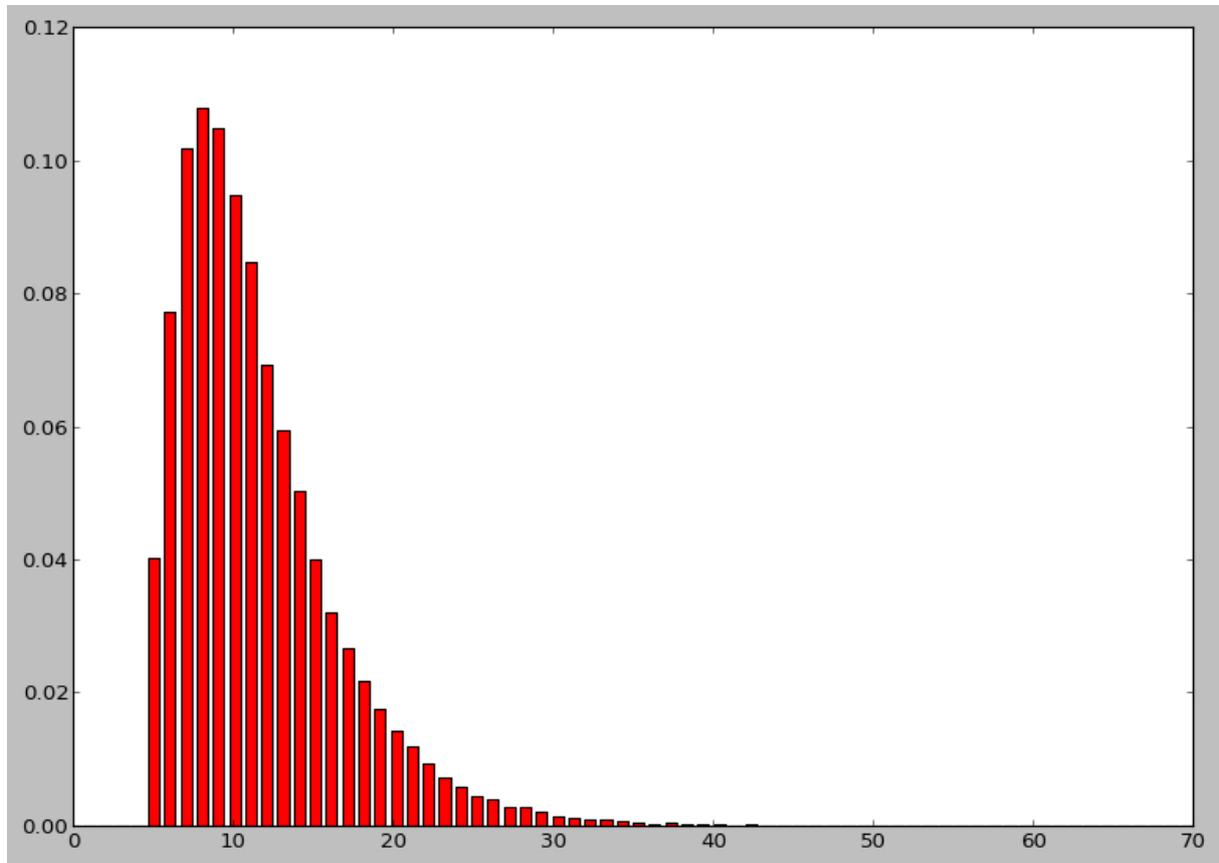
print("Nombre moyen Nm = ",Nk/N)
FNj = [u/N for u in Nj]
plt.bar(Ni,FNj,align='center', width = 0.7, color = 'r')
plt.show()
```

**\*\*\* Console de processus distant Réinitialisée \*\*\***

>>>

Nombre moyen Nm = 11.409771428571428

Il faut en moyenne **11,4 jours** pour remplacer tous les kiwis verts par des kiwis jaunes.

**Graphique :**

En abscisse : le nombre de jours pour réaliser (E) (donc tirer les 5 kiwis verts (V)).

En ordonnée : la fréquence  $N_j[i]/N$  pour chaque nombre de jours  $i$  en abscisse. Il s'agit donc de la fréquence de la réalisation de (E) en  $i$  jours.

On remarque qu'au-delà de 50 jours, on peut considérer que tous les kiwis verts ont été remplacés.

A l'abscisse 5 (5 jours), on obtient bien une valeur proche de 0,038.

Pour  $N = 70000$  :

```
>>> Nj[5]/70000
0.03887142857142857
>>>
```

Vidéo Youtube : <https://youtu.be/GZEKowvisy0>

The screenshot shows a PyScripter window with a menu bar (Fichier, Edition, Rechercher, Affichage, Projet, Exécuter, Outils, Aide) and a toolbar. The main area contains a slide with the following content:

## Python, probabilités & chaînes de Markov

### Les 5 kiwis verts & jaunes

The slide features a Markov chain diagram with six states (A, B, C, D, E, F) and a photograph of kiwi fruit.

**Markov Chain Diagram:**

- States: A, B, C, D, E, F (represented by yellow circles).
- Transitions and Probabilities:
  - A to B: 1.00
  - B to A: 0.20
  - B to C: 0.80
  - C to B: 0.40
  - C to D: 0.60
  - D to C: 0.60
  - D to E: 0.40
  - E to D: 0.40
  - E to F: 0.20
  - F to E: 0.20
  - F to F: 1.00

**Photograph:** A collection of kiwi fruit, including whole brown kiwis and several sliced green and yellow kiwis.

## A propos des tutoriels

### Site Internet :

Le site Internet <http://www.joseouin.fr> propose un ensemble de tutoriels vidéo portant sur différents domaines : Excel, Word, Libre Office, LMS Claroline, Mathématiques, Geogebra, Python, Scilab, Visual Basic, Photofiltre, CMS Joomla, Ubuntu, Windows & Autres. De nouveaux tutoriels sont régulièrement mis en ligne.

### Chaîne Youtube :

Toutes les vidéos sont hébergées sur la chaîne Youtube « Mathématiques Magiques » :  
<https://www.youtube.com/c/MathematiquesMagiques>

Pensez à vous abonner et cliquez sur le petit pouce bleu de la vidéo qui vous avez visionnée si le contenu vous a convenu. Merci à vous.

The screenshot shows a website page titled "A propos des tutoriels". On the left is a navigation menu with links like "Accueil", "Didacticiels", "Tutoriels Vidéo", "Mathématiques", and "QCM en ligne". The main content area has a heading "A propos des tutoriels" followed by text: "Des tutoriels vidéos pour l'utilisation de logiciels. Pensez à cliquer sur 'J'aime' et à 'Partager'. Merci." Below this is a yellow box with the text "Accès à la chaîne Youtube : Mathématiques Magiques" and a YouTube logo. A video player shows a cartoon of a blonde woman and a giraffe with speech bubbles that say "Pensez à vous abonner à la chaîne." and "Et à cliquer sur 'J'aime'.". To the right of the video player are social sharing buttons for Facebook, Twitter, LinkedIn, Email, and Print. Below the sharing buttons is a search bar labeled "Rechercher" and a "Publications" section.

J'espère que ce tutoriel vous rendra service.

José OUIN.