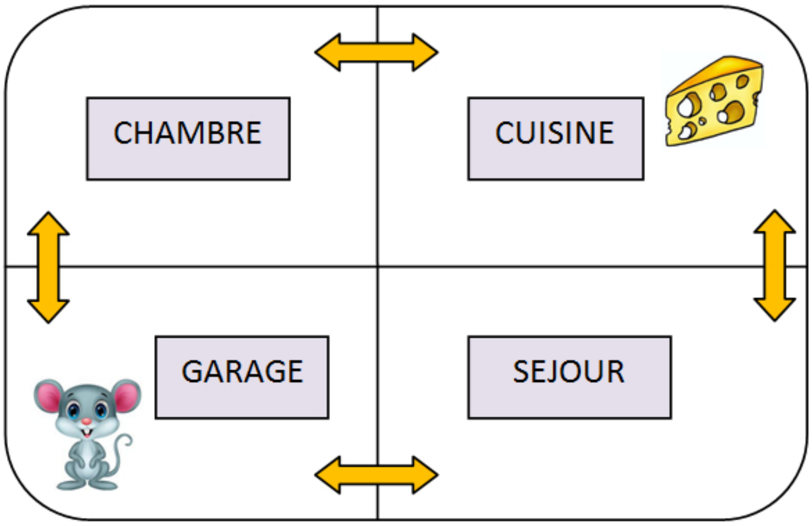
Python, probabilités & chaînes de Markov

La souris et le fromage



Une maison de campagne comporte 4 pièces : un garage (G), une chambre (C), un séjour (S) et une cuisine (F).
A l'instant t = 0, une souris se trouve dans le garage. Elle peut aller et venir dans chaque pièce en passant par les trous symbolisés par les flèches jaunes.
Toutes les minutes, il y a :
– 50 % de chance que la souris reste dans la pièce où elle est actuellement ;
– 25 % de chance que la souris passe dans une pièce voisine.

Par exemple, pour t = 1 minute, la probabilité que la souris reste dans le garage est égale à 0,50, la probabilité que la souris passe dans la chambre est égale à 0,25 et enfin la probabilité qu'elle passe dans le séjour est égale à 0,25.

Important : Dès que la souris a atteint la cuisine (F) (donc le fromage) elle ne repart plus dans les autres pièces. Elle mange tranquillement le fromage.

Il s'agit de répondre aux deux questions suivantes :

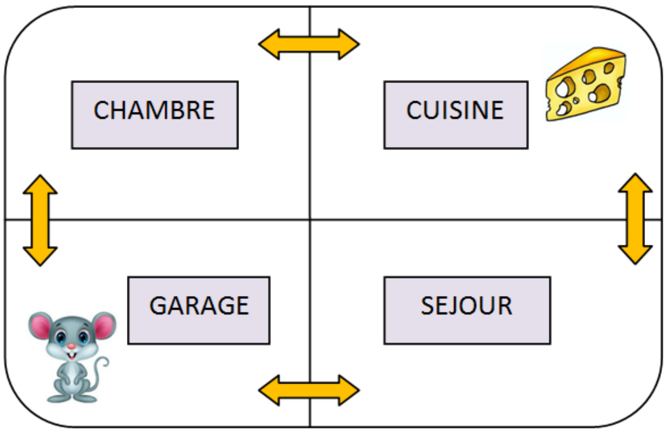
Question Q1 :
Déterminer le nombre de minutes tel que la probabilité que la souris atteigne le fromage soit supérieure à 99 %

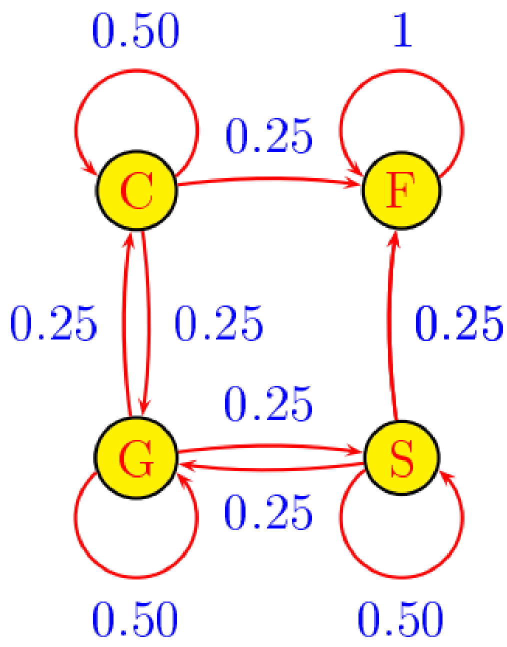
Question Q2 :
Quel est le temps moyen (nombre moyen de minutes) mis par la souris pour atteindre le fromage ?

Question Q1 :

Déterminer le nombre de minutes tel que la probabilité que la souris atteigne le fromage soit supérieure à 99 %

On dessine la chaîne de Markov suivante :





On en déduit la matrice de transition K. Le vecteur colonne X_0 comporte dans l'ordre les probabilités : P_G, P_C, P_F et P_S.

$$X_{n+1} = K * X_n \text{ avec : } K = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 1 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,50 \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = K^n * X_0 \text{ avec : } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = K * X_0 = \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,25 \\ 0 \\ 0,25 \end{pmatrix} \; ; \; X_2 = K^2 * X_0 = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,25 \\ 0,125 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } X_3 = K^3 * X_0 = \begin{pmatrix} 0,3125 \\ 0,21875 \\ 0,25 \\ 0,21875 \end{pmatrix}$$

Le programme Python :

```
import numpy as np

def MIteration(n) :
    P = np.array([[1],[0],[0],[0]])
    for k in range(n) :
        P = M.dot(P)
    return P

M = np.array([[0.5,0.25,0,0.25],[0.25,0.5,0,0],[0,0.25,1,0.25],[0.25,0,0,0.5]])
P = np.array([[1],[0],[0],[0]])

T = 0

while P[2,0] < 0.99 :
    P = M.dot(P)
    T = T + 1

print("P(F) > 0.99 pour t = ", T, " minutes.")
print("P(F) = ",P[2,0])
```

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
P(F) > 0.99 pour t =  31  minutes.
P(F) =  0.9910896013084312
>>>
```

Au bout de 31 minutes, la probabilité que la souris atteigne le fromage est supérieure à 99 %

Quelques valeurs de probabilités pour t = 2 min à t = 14 min

La probabilité P_F est en rouge.

```
>>> MIteration(2)
array([[0.375],
       [0.25 ],
       [0.125],
       [0.25 ]])

>>> MIteration(3)
array([[0.3125 ],
       [0.21875],
       [0.25   ],
       [0.21875]])

>>> MIteration(4)
array([[0.265625],
       [0.1875  ],
       [0.359375],
       [0.1875  ]])

>>> MIteration(5)
array([[0.2265625 ],
       [0.16015625],
       [0.453125  ],
       [0.16015625]])
```

```
>>> MIteration(6)
array([[0.19335938],
       [0.13671875],
       [0.53320312],
       [0.13671875]])

>>> MIteration(7)
array([[0.16503906],
       [0.11669922],
       [0.6015625 ],
       [0.11669922]])

>>> MIteration(8)
array([[0.14086914],
       [0.09960938],
       [0.65991211],
       [0.09960938]])

>>> MIteration(9)
array([[0.12023926],
       [0.08502197],
       [0.7097168 ],
       [0.08502197]])

>>> MIteration(10)
array([[0.10263062],
       [0.0725708 ],
       [0.75222778],
       [0.0725708 ]])

>>> MIteration(11)
array([[0.08760071],
       [0.06194305],
       [0.78851318],
       [0.06194305]])

>>> MIteration(12)
array([[0.07477188],
       [0.0528717 ],
       [0.81948471],
       [0.0528717 ]])

>>> MIteration(13)
array([[0.06382179],
       [0.04512882],
       [0.84592056],
       [0.04512882]])

>>> MIteration(14)
array([[0.05447531],
       [0.03851986],
       [0.86848497],
       [0.03851986]])

Une de plus :
>>> MIteration(25)
array([[0.00954415],
       [0.00674873],
       [0.97695838],
       [0.00674873]])
```

Question Q2 :

Quel est le temps moyen (nombre moyen de minutes) mis par la souris pour atteindre le fromage ?

Le programme Python :

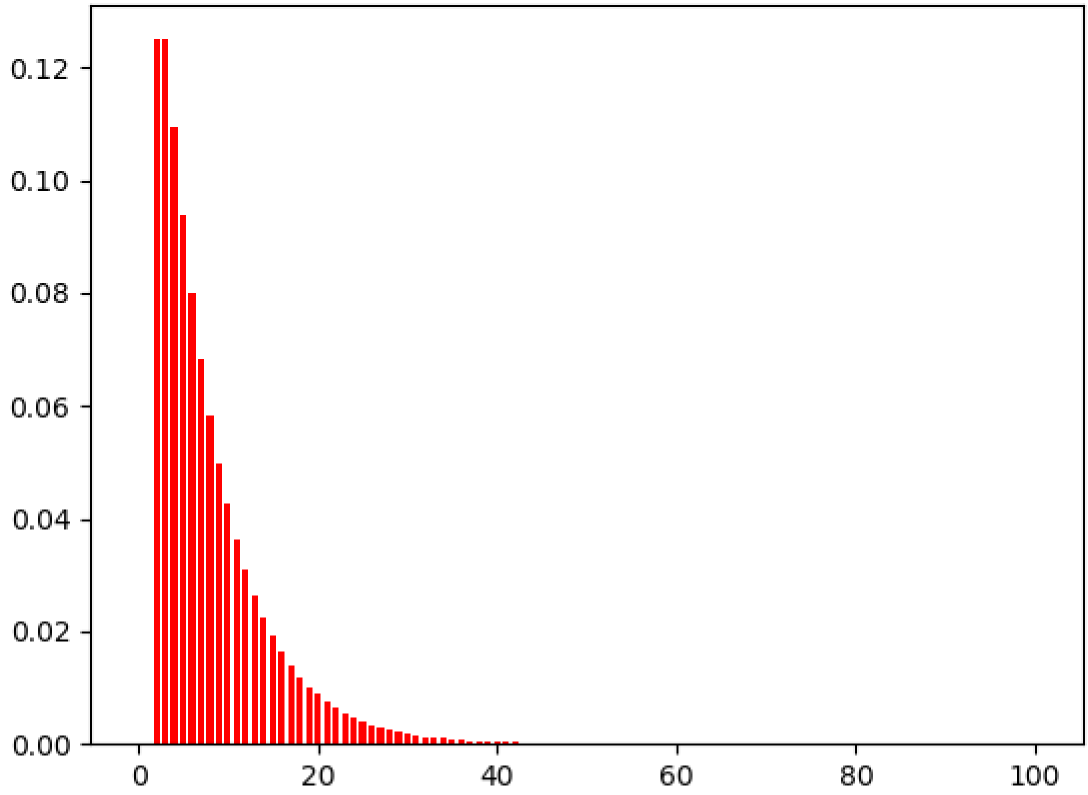
```
import numpy as np
from random import *
import matplotlib.pyplot as plt

N = 1000000 # Nombre d'essais total
Ty =  np.zeros(101)
Tx = np.linspace(0,100,101)

Nk = 0 # Nombre d'essais
t = 0
P = "G" # Position Garage

def MouveMouse(X) :
    if X == "G" :
        NX = choice(["G","G","C","S"])
    elif X == "C" :
        NX = choice(["C","C","G","F"])
    elif X == "S" :
        NX = choice(["S","S","G","F"])
    else :
        NX = "F"
    return NX

while Nk < N  :
    #Mouvement
    P = MouveMouse(P)
    t =  t + 1
    if t > 100 :
        t = 0
        Nk = Nk + 1
        P = "G"
    elif P == "F" :
        Ty[t] = Ty[t] + 1
        t = 0
        Nk = Nk + 1
        P = "G"


Tm = sum(Tx*Ty/N)
Tf = Ty/N
print("Temps moyen Tm = ",Tm, ," minutes."    )

plt.bar(Tx,Tf,align ='center', width = 0.7, color = 'r')
plt.show()
```

Résultats :

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
Pour N = 100000
Temps moyen Tm =  7.987305999999997
>>>
Pour N = 10000000
Temps moyen Tm =  8.0018072  minutes.
```

La souris mettra en moyenne 8 minutes pour atteindre le fromage dans la cuisine.

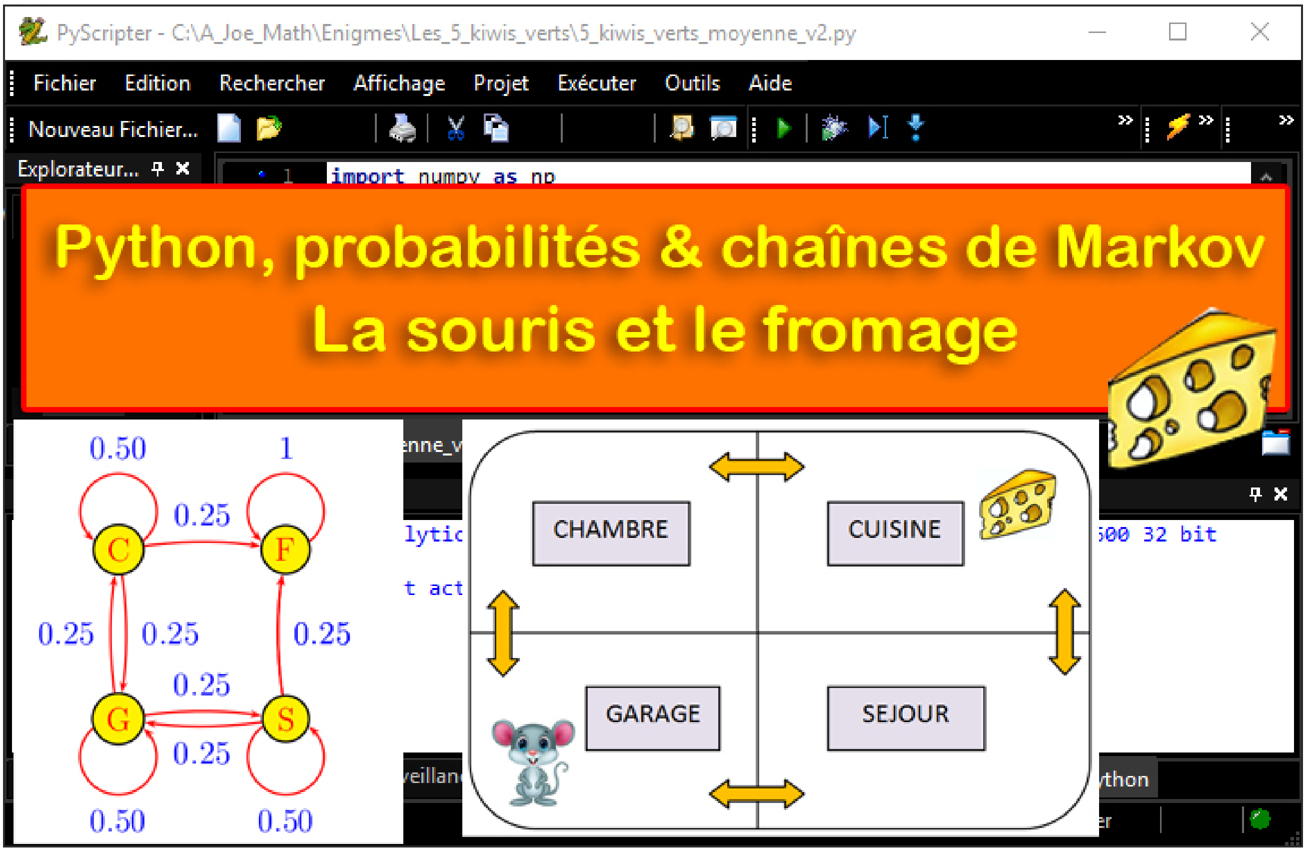
Graphique



Abscisses : Temps T en minutes.

Ordonnées : Fréquence de l'évènement F : « La souris a atteint le fromage en T minutes »

Vidéo Youtube : https://youtu.be/TICdNpJzlLQ



A propos des tutoriels

Site Internet :

Le site Internet http://www.joseouin.fr propose un ensemble de tutoriels vidéo portant sur différents domaines : Excel, Word, Libre Office, LMS Claroline, Mathématiques, Geogebra, Python, Scilab, Visual Basic, Photofiltre, CMS Joomla, Ubuntu, Windows & Autres. De nouveaux tutoriels sont régulièrement mis en ligne.

Chaîne Youtube :

Toutes les vidéos sont hébergées sur la chaîne Youtube « Mathématiques Magiques » :

https://www.youtube.com/c/MathematiquesMagiques

Pensez à vous abonner et cliquez sur le petit pouce bleu de la vidéo qui vous avez visionnée si le contenu vous a convenu. Merci à vous.

J'espère que ce tutoriel vous rendra service.

José OUIN.