José Ouin
Ingénieur INSA Toulouse
Ancien élève de l'ENS Cachan
Professeur Agrégé de Génie civil
Professeur Agrégé de Mathématiques

Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur

Tome 3 : Trigonométrie & Géométrie

Rappels de cours et exercices corrigés

Du même auteur aux Editions Ellipses et Educalivre

ISBN : 978-2-9593648-3-9

Avant-Propos

Cet ouvrage, conçu avec une attention particulière à la rigueur et à la clarté, a pour objectif d'accompagner les étudiants dans leur préparation aux études supérieures. En proposant des rappels de cours précis et des exercices résolus et détaillés, il constitue un support méthodique non seulement pour aborder les concepts fondamentaux des mathématiques, mais aussi pour réviser les notions acquises au lycée dans le cadre du baccalauréat.

Ce livre s'inscrit dans une série de quatre ouvrages (Algèbre, Analyse, Trigonométrie & Géométrie, Statistique & Probabilité), chacun dédié à une branche spécifique des mathématiques. Ces ouvrages offrent une progression cohérente et graduée, permettant aux étudiants de renforcer leurs bases tout en se préparant aux exigences des études post-baccalauréat.

Je suis convaincu que cette série saura répondre aux besoins des étudiants et des enseignants, en offrant un soutien précieux pour consolider les acquis en mathématiques et en faciliter l'application pratique dans le cadre de leurs études supérieures. Que ces livres deviennent des compagnons de confiance dans leur parcours académique et un tremplin vers la réussite.

José Ouin
www.joseouin.fr

Présentation détaillée des quatre ouvrages suivants :

Bases mathématiques essentielles pour préparer l’entrée dans le supérieur

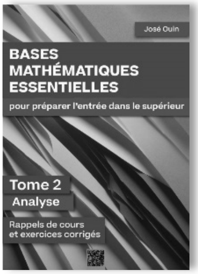
 **ISBN :** 978-2-9593648-1-5	**Bases mathématiques essentielles pour préparer l’entrée dans le supérieur – Tome 1 : Algèbre** • Prérequis essentiels • Calcul matriciel • Fonctions polynômes • Fonctions rationnelles • Nombres complexes
 **ISBN :** 978-2-9593648-2-2	**Bases mathématiques essentielles pour préparer l’entrée dans le supérieur – Tome 2 : Analyse** • Fonction logarithme et fonction exponentielle • Généralités sur les fonctions • Fonctions réciproques • Calcul intégral • Équations différentielles • Fonctions de plusieurs variables • Opérateurs différentiels • Calcul d’incertitudes
 **ISBN :** 978-2-9593648-3-9	**Bases mathématiques essentielles pour préparer l’entrée dans le supérieur – Tome 3 : Trigonométrie & Géométrie** • Prérequis essentiels (triangles) • Trigonométrie • Géométrie dans le plan • Géométrie dans l’espace
 **ISBN :** 978-2-9593648-4-6	**Bases mathématiques essentielles pour préparer l’entrée dans le supérieur – Tome 4 : Statistique & Probabilité** • Statistique descriptive • Ajustement linéaire • Lois de probabilité

Table des matières

1 Première partie

Prérequis essentiels

2 Deuxième partie

Trigonométrie

Troisième partie

Géométrie dans le plan

Quatrième partie

Géométrie dans l'espace

1

Première partie

Prérequis essentiels

Pythagore, parmi les figures éminentes qui résonnent à travers les siècles dans le vaste panorama des mathématiques, émerge tel un phare dans la nuit du savoir antique, illuminant le chemin du savoir de son génie.
Né au VI^{e} siècle avant notre ère, dans la cité grecque de Samos, Pythagore ne se contenta pas seulement de sculpter son nom dans les annales de l'histoire, mais façonna également les fondations mêmes des mathématiques.

Son héritage, d'une valeur incalculable, réside en grande partie dans le domaine des triangles rectangles, où son nom est inséparable du théorème qui porte sa signature. Le théorème de Pythagore énonce une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Sa forme simple cache un trésor de ramifications, servant de base à d'innombrables applications dans les mathématiques et au-delà.

Cette partie introductive met en avant les prérequis essentiels en mathématiques, où le nom de Pythagore résonne comme un appel à la découverte et à la compréhension.

Pourquoi est-ce que ces prérequis sont essentiels ?

Les prérequis en géométrie et trigonométrie, notamment la résolution de triangles rectangles, sont essentiels pour comprendre et appliquer de nombreux concepts mathématiques et scientifiques. Le premier point, le théorème de Pythagore, est une pierre angulaire de la géométrie. Ce théorème permet de relier les longueurs des côtés d'un triangle rectangle et est utilisé dans une multitude de situations pratiques, comme la mesure des distances dans l'espace ou la construction.

Les propriétés du triangle rectangle et du cercle circonscrit, quant à elles, offrent une meilleure compréhension des figures géométriques et de leurs relations dans un plan. La connaissance de ces propriétés permet d'analyser et de résoudre des problèmes complexes en géométrie, tels que la construction de figures, la détermination de distances ou encore la compréhension des relations entre les angles et les longueurs. Le cercle circonscrit, qui passe par tous les sommets du triangle, joue un rôle fondamental dans ces analyses.

Enfin, les relations trigonométriques dans le triangle rectangle, telles que les fonctions sinus, cosinus et tangente, sont des outils puissants non seulement en géométrie mais aussi dans des domaines plus larges comme la physique, l'ingénierie et l'astronomie. Ces relations permettent de relier les angles et les côtés d'un triangle, facilitant ainsi la résolution de problèmes liés aux angles de vision, aux forces ou encore aux trajectoires.

Ainsi, la maîtrise de ces prérequis est indispensable pour aborder des domaines plus avancés en mathématiques et en sciences. Ils fournissent des bases solides pour la résolution de problèmes complexes, que ce soit dans des applications théoriques ou pratiques. Une bonne compréhension de ces concepts est donc essentielle pour quiconque souhaite s'orienter vers des disciplines scientifiques ou techniques.

Rappels de cours
Prérequis essentiels

1- Résolution de triangles rectangles

La résolution d'un triangle consiste à déterminer les mesures des angles et des côtés du triangle. Dans un triangle rectangle, l'un des angles est toujours de 90 degrés, tandis que les deux autres angles sont aigus (inférieurs à 90 degrés). Pour résoudre un tel triangle, il est souvent nécessaire de trouver les mesures des angles et des côtés inconnus en utilisant des relations trigonométriques telles que le sinus, le cosinus et la tangente.

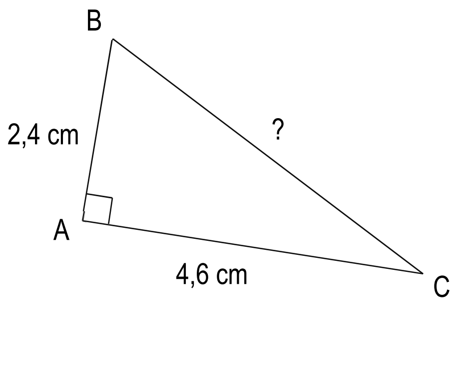
La résolution d'un triangle rectangle implique généralement de connaître au moins une mesure de côté, ce qui peut être utilisé pour calculer les autres mesures à l'aide des rapports trigonométriques appropriés. Par exemple, si vous connaissez la longueur de l'hypoténuse et un angle, vous pouvez utiliser le sinus, le cosinus ou la tangente pour trouver les longueurs des autres côtés.

En résumé, la résolution d'un triangle rectangle consiste à déterminer les mesures des angles et des côtés inconnus en utilisant des relations trigonométriques, en commençant souvent par une mesure connue et en appliquant des méthodes de calcul appropriées.

1-1. Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. En particulier, la longueur de l'hypoténuse est donc toujours supérieure à celle de chaque autre côté.

Exemple :
Dans le triangle rectangle ABC, rectangle en A, calculer la longueur du côté BC.



Solution :

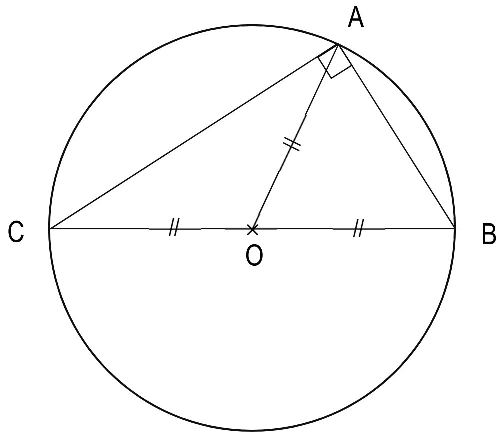
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = (2{,}4)^2 + (4{,}6)^2 = 26{,}92$$

$$BC = \sqrt{26{,}92} \approx 5{,}19 \text{ cm}$$

1-2. Propriétés du triangle rectangle et du cercle circonscrit

- Si un triangle est un triangle rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit.

- Si un triangle est un triangle rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

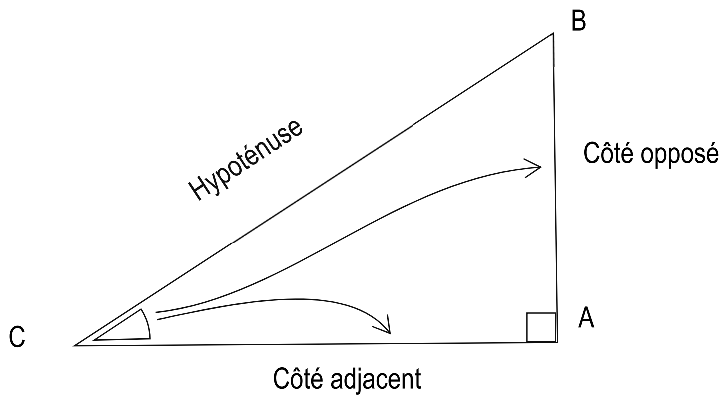


- Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle.

- Si dans un triangle la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté alors ce triangle est rectangle.

1-3. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle

Dans le triangle ABC rectangle en A ci-contre, on donne les relations entre le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle en fonction des longueurs des côtés *AB*, *AC* et *BC*.
L'hypoténuse est le plus grand côté *BC*, opposé à l'angle droit.



On définit les quotients suivants :

- le sinus de l'angle $\hat{C}$ est :

$$sin\hat{C} = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

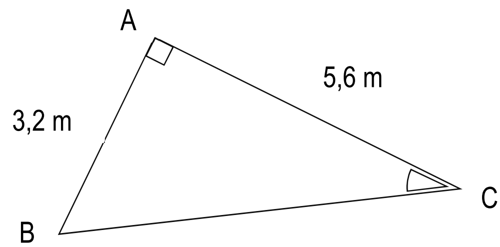
- le cosinus de l'angle $\hat{C}$ est :

$$cos\hat{C} = \frac{\text{mesure du côté adjacent}}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

- la tangente de l'angle $\hat{C}$ est :

$$tan\hat{C} = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}} = \frac{AB}{AC}$$

Exemple :
Calculer la valeur arrondie au dixième de la mesure de l'angle $\hat{C}$.



Solution :
Application directe de la tangente de l'angle $\hat{C}$:

$$tan\hat{C} = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}} = \frac{AB}{AC} = \frac{3.2}{5.6} = 0{,}5714 \ldots$$

On en déduit la valeur de l'angle $\hat{C}$ arrondie au dixième :

$$\hat{C} = 29{,}7°$$

On reprend cet exercice afin d'utiliser les relations avec le sinus et le cosinus.

On commence par calculer la longueur de l'hypoténuse BC :

$$BC^2 = (3{,}2)^2 + (5{,}6)^2 = 41.6$$

$$BC = 6.4498 \ldots \text{ m}$$

- **En utilisant la relation avec le sinus :**

$$sin\hat{C} = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} = \frac{3,2}{6.4498\ \dots}$$

$$sin\hat{C} = 0,4961\ \dots$$

On en déduit la valeur de l'angle $\hat{C}$ arrondie au dixième :

$$\hat{C} = 29,7°$$

- **En utilisant la relation avec le cosinus :**

$$cos\hat{C} = \frac{\text{mesure du côté adjacent}}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{5,6}{6.4498\ \dots}$$

$$cos\hat{C} = 0,8682\ \dots$$

On en déduit la valeur de l'angle $\hat{C}$ arrondie au dixième :

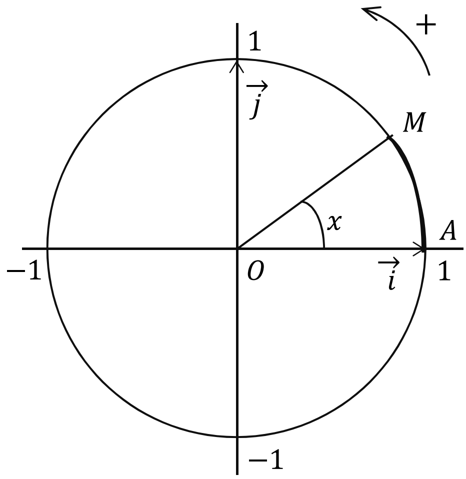
$$\hat{C} = 29,7°$$

Rappels de cours
Trigonométrie

1- Mesures en radian d'un angle orienté

1-1. Définition

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.



Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 et de centre O orienté dans le sens trigonométrique (sens inverse de celui des aiguilles d'une montre).
Soit A le point de coordonnées $A(1\,;0)$ et M un point quelconque du cercle trigonométrique. Une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OM}\right)$ est la longueur algébrique de l'arc de cercle défini entre les points A et M :

$$x = (\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OM})$$

Les mesures d'un angle orienté
Un angle orienté possède une infinité de mesures. Si x est l'une d'entre elles, les autres sont de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
En effet, le cercle trigonométrique, de rayon 1, a une circonférence égale à 2π. Par exemple, voici quelques mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OA})$:

➔ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}) = 0$;
➔ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}) = 2\pi$ (ici $k = 1$; on a parcouru le cercle dans le sens trigonométrique et on a ajouté un tour complet. Ceci positionne correctement le point A sur le cercle trigonométrique) ;
➔ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}) = -2\pi$;
➔ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}) = -4\pi$.

1-2. Mesure principale et angle géométrique

Parmi les mesures d'un angle orienté (ou d'un arc orienté) il en existe une, et une seule, appelée mesure principale appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$ correspond à l'angle géométrique formé entre les segments $[OA]$ et $[OM]$ du triangle OAM.

1-3. Les différentes unités utilisées

Les différentes unités utilisées sont :

➔ le radian, noté « rad » ;

➔ le degré, noté « $°$ » ;

➔ le grade ou le gon (gônia signifie angle en grec) noté « gon ».

Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Angle en degrés	0	30	45	60	90	180	360
Angle en grades	0	$\frac{100}{3}$	50	$\frac{200}{3}$	100	200	400

2- Les fonctions sinus, cosinus et tangente

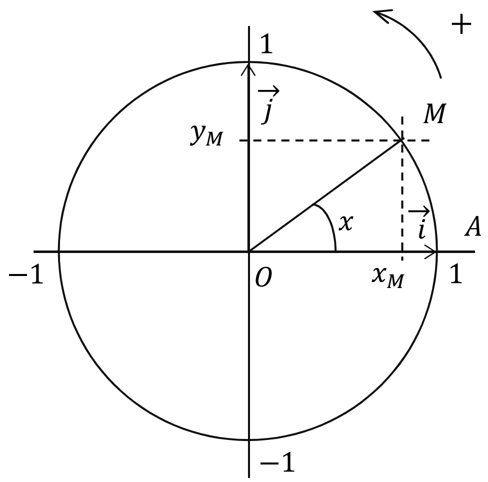
2-1. Définitions

Soit $x = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ un angle orienté en radian. A chaque nombre réel x correspond un point M du cercle trigonométrique. Le point M a pour coordonnées $(x_M\ ;\ y_M)$.

On appelle x_M le **cosinus du nombre x**. Il s'agit de l'**abscisse** du point M dans le repère $\left(O\ ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On appelle y_M le **sinus du nombre x**. Il s'agit de l'**ordonnée** du point M dans le repère $\left(O\ ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Le point M a donc pour coordonnées $(\cos x\ ; \sin x)$

On définit ainsi les fonctions suivantes :



sinus : $\begin{cases} \mathrm{IR} \to [-1\ ; 1] \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$

cosinus : $\begin{cases} \mathrm{IR} \to [-1\ ; 1] \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$

Le théorème de Pythagore permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

4- Résolution de triangles

En géométrie, la résolution d'un triangle consiste en la détermination des différents éléments d'un triangle (longueurs des côtés et mesures des angles) à partir de certains autres.

Notations

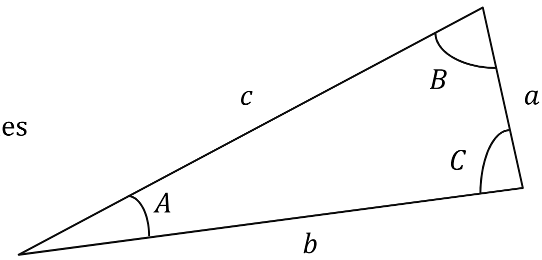
On note A, B et C les angles opposés aux côtés de longueurs a, b et c.

4-1. Relations de base

4-1.1 Somme des angles internes

En utilisant les notations :

$$A + B + C = \pi \text{ rad} = 180\,° = 200 \text{ grades}$$



4-1.2 Relation des sinus (ou loi des sinus)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2S}{abc}$$

où S est l'aire du triangle ABC.

- **Remarque importante relative à la relation des sinus**

Ne pas utiliser la loi des sinus pour calculer des angles :

Étant donné que la fonction $arcsin()$ renvoie des valeurs d'angle dans le domaine $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$ radians (de $-90°$ à $+90°$), elle ne couvre pas l'ensemble des angles possibles dans un triangle quelconque. Ainsi, il n'est pas recommandé d'utiliser la loi des sinus pour calculer des angles dans un triangle quelconque, car cela peut conduire à des résultats incorrects lorsque les angles du triangle dépassent ce domaine. Il faut plutôt utiliser le théorème d'Al-Kashi ou d'autres méthodes appropriées pour calculer les angles d'un triangle quelconque.

- **Calcul de l'aire d'un triangle quelconque**

On rappelle l'expression suivante :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2S}{abc}$$

On en déduit l'expression de l'aire du triangle ABC :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

4-1.3 Théorème de Pythagore généralisé ou théorème d'Al-Kashi

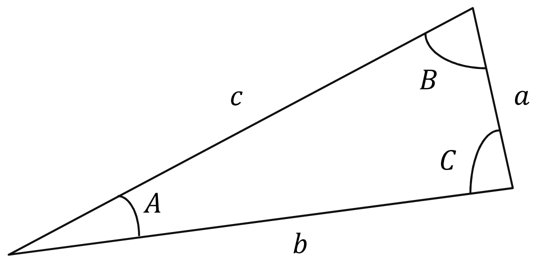
Le théorème d'Al-Kashi énonce que dans un triangle quelconque, le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, moins le double produit de ces longueurs par le cosinus de l'angle entre ces deux côtés.

On a donc les égalités suivantes :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



Ce théorème est souvent utilisé pour calculer les côtés ou les angles d'un triangle lorsqu'on connaît les mesures des autres côtés et angles. Il est particulièrement utile pour résoudre des triangles quelconques où les règles des triangles rectangles ne s'appliquent pas.

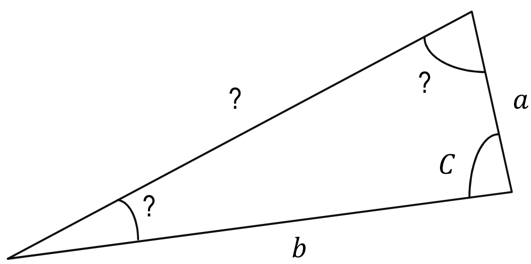
4-2. Les différents cas de résolution de triangles

4-2.1 L'angle *C* et ses deux côtés adjacents *a* et *b* sont connus

- Calcul du côté c :

On utilise la formule :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



- Calcul de l'angle A :

On utilise la formule :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

- Calcul de l'angle B :

On utilise la formule :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

On vérifie ensuite que : $A + B + C = \pi \text{ rad} = 180\,° = 200 \text{ grades}.$

Dans le triangle rectangle AKI, on obtient l'égalité suivante :

$$cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{AK}{AI} = \frac{5/2}{R} = \frac{5}{2R}$$

d'où :

$$R = \frac{5}{2\,cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

On a vu que :

$$sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{OH}{OA} = \frac{3}{5}$$

On rappelle la relation trigonométrique suivante :

$$sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1 - sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Dans cet exercice :

$$cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = +\sqrt{1 - sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

On a donc :

$$R = \frac{5}{2\,cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{5}{2\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{25}{8}$$

On obtient finalement la valeur du rayon du cercle :

$$R = \frac{25}{8}$$

Exercice 6

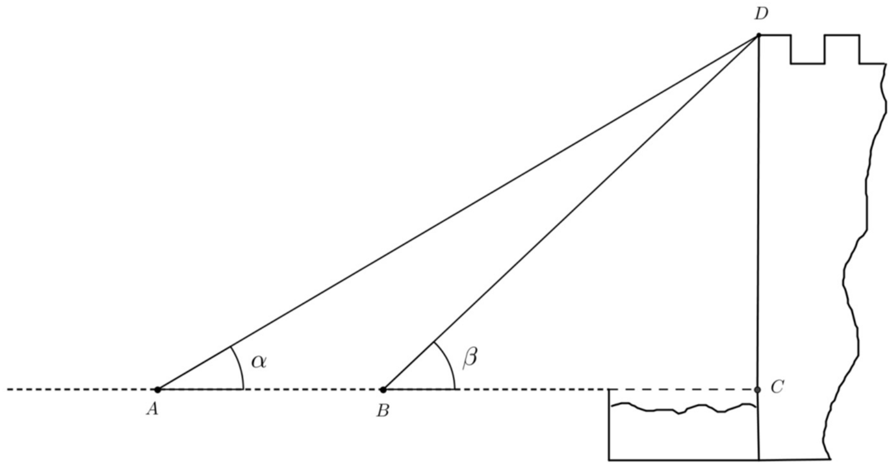
On souhaite déterminer la hauteur d'un bâtiment dont la base (le point C) est inaccessible. A l'aide d'un théodolite, on mesure les deux angles verticaux α et β ainsi que la longueur $AB = L$.

1/ Calculer la hauteur $h = CD$ du bâtiment en fonction des valeurs mesurées α, β et L.

2/ On a mesuré les valeurs suivantes :

$$\alpha = 51{,}25 \text{ grades}, \beta = 72{,}35 \text{ grades et } AB = 10 \text{ m}.$$

En déduire la hauteur du bâtiment à 10^{-1} m près.



Solution

1/ On écrit les égalités suivantes :

$$tan\,\alpha = \frac{h}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{h}{tan\,\alpha}$$

et

$$tan\,\beta = \frac{h}{AC - L}$$

On en déduit l'équation :

$$tan\,\beta = \frac{h}{\frac{h}{tan\,\alpha} - L} \Leftrightarrow tan\,\beta = \frac{h}{\frac{h - L\,tan\,\alpha}{tan\,\alpha}} \Leftrightarrow tan\,\beta = \frac{h\,tan\,\alpha}{h - L\,tan\,\alpha}$$

$$\Leftrightarrow tan\,\beta\,(h - L\,tan\,\alpha) = h\,tan\,\alpha \Leftrightarrow h(tan\,\beta - tan\,\alpha) = L\,tan\,\alpha\,tan\,\beta$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{L\,tan\,\alpha\,tan\,\beta}{tan\,\beta - tan\,\alpha}$$

On obtient finalement :

$$h = \frac{L\,tan\,\alpha\,tan\,\beta}{tan\,\beta - tan\,\alpha}$$

2/ On effectue l'application numérique :

$h \approx 20{,}096\ \text{m}$, soit $h = 20{,}1\ \text{m}$ à $10^{-1}\ \text{m}$ près.

Rappels de cours
Géométrie dans le plan

Pour l'ensemble de cette partie, on définit un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$: $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1- Coordonnées et norme d'un vecteur

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan $\mathcal{P}$. On rappelle les définitions suivantes :

➔ Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{matrix}\right.$

➔ Norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Remarque

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$; la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la distance AB.

2- Produit scalaire

2-1. Formulation du produit scalaire

2-1.1 Expression analytique

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ a l'expression suivante :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y'$ avec $\vec{u}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}\right.$, dans un repère orthonormé.

Remarque

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$$

2-1.2 Expression géométrique

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ a l'expression suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,,\vec{v})$$

où $(\vec{u}\,,\vec{v})$ est l'angle orienté formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2-2. Orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan $\mathcal{P}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

2-3. Vecteur normal à une droite dans le plan

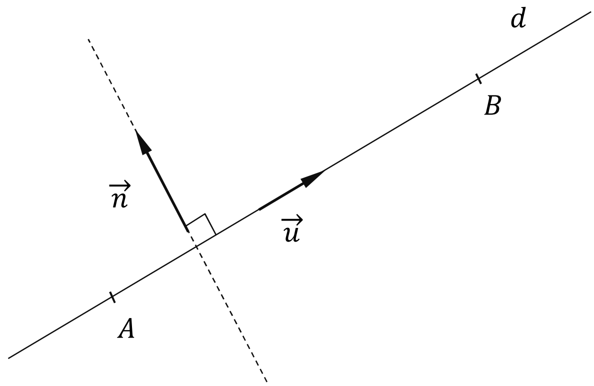
Définition

Un vecteur normal $\vec{n}$ à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.

Remarques

(1) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

(2) Pour déterminer un vecteur normal $\vec{n}$, on choisit des coordonnées qui vérifient la condition : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.



Exemple

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan $\mathcal{P}$:

➔ Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{matrix}\right.$

➔ Coordonnées du vecteur normal $\vec{n}$: $\vec{n}\left|\begin{matrix} -(y_B - y_A) \\ x_B - x_A \end{matrix}\right.$

Le vecteur $\vec{n}$ vérifie bien la condition : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

3- Equations cartésiennes dans le plan

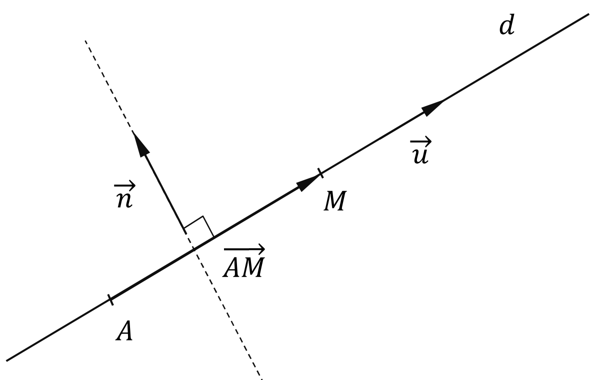
3-1. Caractérisation d'une droite dans le plan

Soit d une droite, $A(x_A\,;y_A)$ un point de d et $\vec{n}$ un vecteur normal à la droite d.

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

On a l'équivalence suivante :

$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$



La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient orthogonaux.

Exercices pour s'entraîner

Dans toute cette partie, le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Exercice 1

On considère la droite d d'équation :

$$3x - 4y + 5 = 0$$

1/ Donner les coordonnées de trois points de la droite d.

2/ Donner un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite d.

3/ Donner un vecteur directeur de la droite d.

4/ Le vecteur $\vec{u}\,(12\,;9)$ est-il un vecteur directeur de la droite d ?

5/ Le vecteur $\vec{v}\,(9\,;-12)$ est-il un vecteur directeur de la droite d ?

Solution

1/ On choisit arbitrairement les trois points suivants :

$$A(1\,;2)\ ;\ B\left(0\,;\frac{5}{4}\right) \text{ et } C\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$$

2/ D'après le cours il suffit de lire les coefficients facteurs de x et de y :

$$3x - 4y + 5 = 0$$

On obtient : $\vec{n}\,(3\,;-4)$.

3/ Il suffit de déterminer les coordonnées d'un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{n}\,(3\,;-4)$. Par lecture des coefficients on obtient le vecteur suivant : $\overrightarrow{u_1}\,(4\,;3)$. Effectivement : $\overrightarrow{u_1}\cdot\vec{n} = 0$

$\overrightarrow{u_1}\,(4\,;3)$ est donc un vecteur directeur de la droite d.

4/ On a l'égalité suivante :

$$\vec{u} = 3\,\overrightarrow{u_1}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u_1}$ sont colinéaires ; le vecteur $\vec{u}\,(12\,;9)$ est donc un vecteur directeur de la droite d.

5/ Les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{u_1}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de coefficient réel k tel que $\vec{v} = k\,\overrightarrow{u_1}$; le vecteur $\vec{v}\,(9\,;-12)$ n'est donc pas un vecteur directeur de la droite d.

Exercice 2

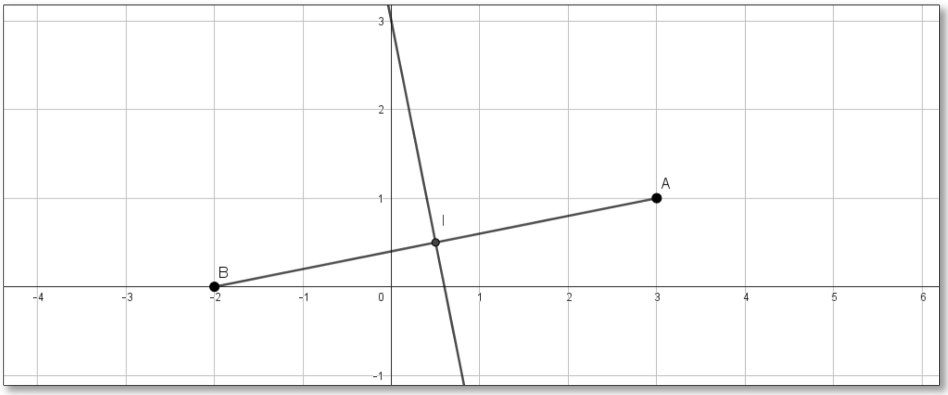
On donne les coordonnées des points $A(3\,;1)$ et $B(-2\,;0)$. On souhaite déterminer une équation de la médiatrice, notée d_m, du segment $[AB]$.

1/ Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[AB]$.

2/ Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite d_m.

3/ En déduire une équation cartésienne de la droite d_m.

4/ Déterminer la distance du point A à la droite d_m et comparer la valeur de $IA = \left\|\overrightarrow{IA}\right\|$.



Solution

1/ Les coordonnées du point milieu I, milieu de $[AB]$ sont les suivantes :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

On obtient :

$$I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

2/ Le vecteur normal $\vec{n}$ à la droite d_m est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}\,(-5\,;-1)$ puisque les droites (AB) et d_m sont perpendiculaires. On choisit le vecteur suivant :

$$\vec{n}\,(-5\,;-1)$$

3/ On en déduit une équation cartésienne de la droite d_m :

$$-5x - y + c = 0$$

$$I \in d_m \Leftrightarrow -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = 3$$

Rappels de cours
Géométrie dans l'espace

On définit un repère orthonormé de l'espace $\mathcal{E}$: $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$

1- Coordonnées et norme d'un vecteur

Soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ deux points de l'espace $\mathcal{E}$. On rappelle les définitions suivantes :

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array}\right.$

Norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la distance AB : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

2- Produit scalaire

2-1. Formulation du produit scalaire

2-1.1 Expression analytique

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, a l'expression suivante :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ avec $\vec{u}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right.$ dans un repère orthonormé.

Remarque

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ permet de déterminer la distance AB au carré.

2-1.2 Expression géométrique

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, a l'expression suivante :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,,\vec{v})$$

où $(\vec{u}\,,\vec{v})$ est l'angle orienté formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2-2. Orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $\mathcal{E}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Remarque

Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

2-3. Équation d'une sphère dans l'espace

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(x_\Omega\,;y_\Omega\,;z_\Omega)$ et de rayon R.
La sphère $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points Mde l'espace tels que : $AM = R$.

$$M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow AM^2 = R^2$$

$$M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

L'équation de la sphère $\mathcal{S}$ dans l'espace a l'expression suivante :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

3- Produit vectoriel

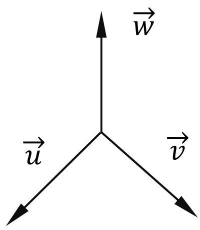
3-1. Trièdre direct

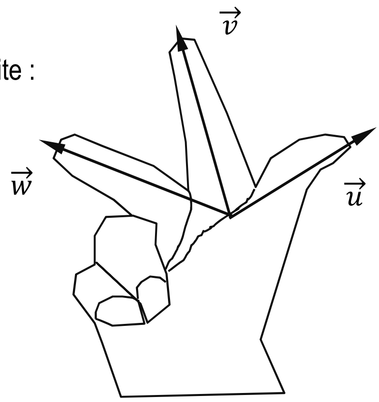
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$.
$(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})$ est un trièdre direct si les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vérifient les deux conditions suivantes :

(1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires ;

(2) Le triplet $(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})$ vérifie la règle des 3 doigts de la main droite :

- $\vec{u}$ dans la direction du pouce ;
- $\vec{v}$ dans la direction de l'index ;
- $\vec{w}$ dans la direction du majeur.





3-2. Définition et interprétation graphique du produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ de l'espace $\mathcal{E}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$

➔ Cas où les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires :
Le vecteur $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ est :

- orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$;
- de direction telle que le trièdre $(\overrightarrow{u_1}\,,\overrightarrow{u_2}\,,\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2})$ est direct ;
- de norme $\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\| = \|\overrightarrow{u_1}\| \times \|\overrightarrow{u_2}\| \times \left|\,sin(\overrightarrow{u_1}\,,\overrightarrow{u_2})\,\right|$ où $(\overrightarrow{u_1}\,,\overrightarrow{u_2})$ est l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$

➔ Cas où les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires :
Le vecteur $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ est égal au vecteur nul :

$$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = \vec{0}$$

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Effectuer les produits vectoriels suivants :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{b} = \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{d} = \begin{vmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{e} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix}$$

Solution

On obtient les résultats suivants :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{b} = \begin{vmatrix} 20 \\ 7 \\ -4 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{c} = \begin{vmatrix} 12 \\ -7 \\ -1 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{d} = \begin{vmatrix} 8 \\ 14 \\ 12 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{e} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est égal au vecteur nul.

Exercice 2

On considère les points $A(1\,;-2\,;7)$, $B(2\,;2\,;1)$ et $C(1\,;1\,;5)$. En utilisant un produit vectoriel, déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Solution

On commence par déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC).
Ce vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Un produit vectoriel permet donc de déterminer les coordonnées de ce vecteur :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC) :

$$10x + 2y + 3z + d = 0$$

$$A \in (ABC) \Leftrightarrow d = -27$$

On obtient l'équation cartésienne du plan (ABC) :

$$10x + 2y + 3z - 27 = 0$$

Exercice 3

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère les plans P_1 et P_2 d'équations cartésiennes respectives : $x - 3y + 2z = 5$ et $2x + y + 7z = 1$

1/ Montrer que les deux plans sont sécants.

2/ Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection D. On posera $z = t$ et on exprimera les coordonnées x et y en fonction de t (t est alors un paramètre, $t \in \mathrm{IR}$).

3/ Déterminer les coordonnées d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ tels que la droite D soit l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u},\, t \in \mathrm{IR}.$$

Solution

1/ On commence par déterminer un vecteur normal pour chaque plan :

$\vec{n_1} = \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{vmatrix}$ est un vecteur normal à P_1 et $\vec{n_2} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{vmatrix}$ est un vecteur normal à P_2

$\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} \neq 0$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les deux plans sont sécants.

2/ Les coordonnées d'un point $M(x\,;y\,;z)$ de la droite D vérifient le système :

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y + 7z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2t = 5 \\ 2x + y + 7t = 1 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 5 - 2t \\ 2x + y = 1 - 7t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{7} - \dfrac{23}{7}t \\ y = -\dfrac{9}{7} - \dfrac{3}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

3/ D'après le système d'équations précédent, on obtient :

$$A\left(\tfrac{8}{7}; -\tfrac{9}{7}; 0\right) \text{ et } \vec{u} = \begin{vmatrix} -23/7 \\ -3/7 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère la droite (AB) avec $A(1\,;2\,;-1)$ et $B(0\,;1\,;3)$ ainsi que le plan P d'équation : $x + y + z - 1 = 0$

1/ Montrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.

2/ Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I. On commencera par déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

Cet ouvrage a été achevé en octobre 2024
Dépôt légal : octobre 2024
Déposé auprès de la BnF (Bibliothèque Nationale de France)