José OUIN
Ingénieur INSA Toulouse
Ancien élève de l'ENS Cachan
Professeur Agrégé de Génie civil
Professeur Agrégé de Mathématiques

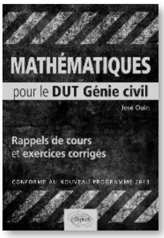
Mathématiques pour le BUT Génie civil – Construction durable

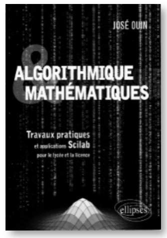
BUT 1ère année

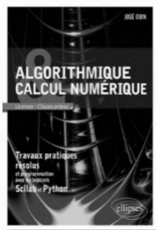
Rappels de cours et exercices corrigés

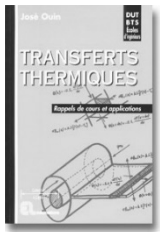
BUT, BTS, Licence.

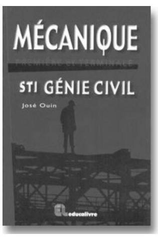
Du même auteur aux Editions Ellipses et Educalivre











ISBN : 978-2-9592760-6-4

Avant-Propos

Dans le domaine exigeant du Génie civil, les mathématiques jouent un rôle essentiel, fournissant les outils nécessaires à la compréhension et à la résolution de problèmes complexes. Pour les étudiants en BUT Génie civil – Construction durable, consolider leurs bases en mathématiques appliquées est une étape cruciale dans leur formation.

Cet ouvrage, conçu avec une attention particulière à la rigueur et à la clarté, vise à accompagner les étudiants tout au long de leur parcours académique. En rassemblant des rappels de cours clairs et des exercices résolus et détaillés, il offre un support méthodique pour aborder les concepts fondamentaux et leur application pratique dans le domaine du Génie civil.

Ce livre constitue le premier volet d'une série de trois ouvrages destinés aux étudiants en première, deuxième et troisième année du BUT Génie civil – Construction durable. Chaque ouvrage est conçu pour correspondre au niveau spécifique de l'étudiant et pour fournir une progression cohérente dans l'apprentissage des mathématiques appliquées.

Je suis convaincu que cet ouvrage saura répondre aux attentes des étudiants et des enseignants en offrant un soutien indispensable pour consolider leurs bases en mathématiques. Que ce livre soit un compagnon de route fiable dans leur quête de connaissances et un maillon essentiel dans la chaîne de leur succès académique.

José OUIN

Présentation détaillée des trois ouvrages suivants :

Mathématiques pour le BUT Génie civil – Construction durable

<table>
<tr>
<td>


ISBN : 978-2-9592760-6-4
</td>
<td>

MATHÉMATIQUES – BUT 1ère année
Pour le BUT Génie civil – Construction Durable

- Prérequis essentiels
- Fonction logarithme et fonction exponentielle
- Trigonométrie
- Géométrie dans le plan
- Généralités sur les fonctions
- Fonctions réciproques
- Calcul intégral

</td>
</tr>
<tr>
<td>


ISBN : 978-2-9592760-7-1
</td>
<td>

MATHÉMATIQUES – BUT 2ième année
Pour le BUT Génie civil – Construction Durable

- Equations différentielles
- Calcul matriciel
- Géométrie dans l'espace
- Fonctions de plusieurs variables
- Opérateurs différentiels
- Calcul d'incertitudes

</td>
</tr>
<tr>
<td>


ISBN : 978-2-9592760-8-8
</td>
<td>

MATHÉMATIQUES – BUT 3ième année
Pour le BUT Génie civil – Construction Durable

- Intégrales doubles
- Algèbre linéaire – Diagonalisation de matrices

</td>
</tr>
</table>

Table des matières

Première partie

Prérequis essentiels

Deuxième partie

Fonction logarithme et fonction exponentielle

Troisième partie

Trigonométrie

4 Quatrième partie

Géométrie dans le plan

Cinquième partie

Généralités sur les fonctions

Sixième partie

Fonctions réciproques

7

Septième partie

Calcul intégral

Première partie

Prérequis essentiels

Pythagore, parmi les figures éminentes qui résonnent à travers les siècles dans le vaste panorama des mathématiques, émerge tel un phare dans la nuit du savoir antique, illuminant le chemin du savoir de son génie.
Né au VIe siècle avant notre ère, dans la cité grecque de Samos, Pythagore ne se contenta pas seulement de sculpter son nom dans les annales de l'histoire, mais façonna également les fondations mêmes des mathématiques.

Son héritage, d'une valeur incalculable, réside en grande partie dans le domaine des triangles rectangles, où son nom est inséparable du théorème qui porte sa signature. Le théorème de Pythagore énonce une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Sa forme simple cache un trésor de ramifications, servant de base à d'innombrables applications dans les mathématiques et au-delà.

Cette partie introductive met en avant les prérequis essentiels en mathématiques, où le nom de Pythagore résonne comme un appel à la découverte et à la compréhension.

Rappels de cours
Prérequis essentiels

1- Résolution d'une équation et d'une inéquation

1-1. Résolution d'une équation

Une équation est une égalité qui contient une inconnue x. Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'une ou de plusieurs valeurs.

Exemple :
Résoudre l'équation suivante :

$$-5x + 3 = -4x + 1$$

Solution :

$$\begin{aligned} -5x + 3 &= -4x + 1 \\ -5x + 4x &= 1 - 3 && \leftarrow \text{On place l'inconnue « } x \text{ » à gauche et les « nombres » à droite.} \\ -x &= -2 && \leftarrow \text{On réduit} \\ x &= 2 && \leftarrow \text{On multiplie par } -1 \text{ à droite et à gauche.} \end{aligned}$$

Finalement la solution est : $x = 2$

1-2. Résolution d'une inéquation

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs.

Exemple 1 :
Résoudre l'inéquation suivante :

$$3x + 1 < 4 - 5x$$

Solution :

$$\begin{aligned} 3x + 1 &< 4 - 5x \\ 3x + 5x &< 4 - 1 \\ 8x &< 3 \\ x &< \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres réels strictement inférieurs à $\frac{3}{8}$. On écrit :

$$S = \left]-\infty\,;\,\frac{3}{8}\right[$$

Exemple 2 :
Résoudre l'inéquation suivante :

$$2x - 6 \leq 5x - 1$$

Solution :

$$2x - 6 \leq 5x - 1$$
$$2x - 5x \leq 6 - 1$$
$$-3x \leq 5$$
$$-x \leq \frac{5}{3}$$
$$x \geq -\frac{5}{3}$$

Règle générale :
← On change le sens de l'inégalité lorsque l'on multiplie ou que l'on divise par un nombre négatif.

Les solutions sont tous les nombres réels supérieurs ou égaux à $-\frac{5}{3}$. On écrit :

$$S = \left[-\frac{5}{3}\ ;\ +\infty\right[$$

2- Résolution d'une équation du second degré

2-1. Définitions

Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où $a, b\ et\ c$ sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

2-2. Propriétés

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, on a les résultats suivants :

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Pourquoi est-ce que les fonctions logarithme et exponentielle sont essentielles ?

Dans le vaste domaine des mathématiques, deux fonctions jouent un rôle crucial : le logarithme et l'exponentielle. Elles sont comme des outils essentiels dans la boîte à outils des mathématiciens, offrant des solutions à des problèmes complexes et ouvrant des portes à la compréhension de divers phénomènes.

La fonction exponentielle peut être vue comme une fonction magique qui modélise la croissance ou la décroissance exponentielle. Que ce soit pour représenter la croissance d'une population, la dégradation radioactive d'un élément, ou encore la charge d'un condensateur, la fonction exponentielle fournit un langage universel pour décrire ces phénomènes.

Exemple concret :
En physique, les éléments radioactifs subissent une désintégration au fil du temps, où le nombre de noyaux radioactifs décroît exponentiellement avec le temps. Cette décroissance suit une loi exponentielle, où la quantité de substance radioactive restante à un moment donné est proportionnelle à la quantité présente initialement, et cette décroissance est caractérisée par une constante spécifique appelée la demi-vie.

D'un autre côté, le logarithme peut être considéré comme un guide dans le monde des échelles et des proportions. Il aide à comprimer de larges gammes de nombres en échelles plus gérables et résout des problèmes impliquant des taux de croissance ou de décroissance constants.

Exemple concret :
Le pH est une mesure de l'acidité ou de la basicité d'une solution aqueuse. Il est défini comme le logarithme décimal de l'inverse de la concentration en ions hydrogène (H+) dans la solution. En d'autres termes, le pH est une échelle logarithmique qui va de 0 à 14, où un pH de 7 est considéré comme neutre (ni acide ni basique), un pH inférieur à 7 indique une solution acide, et un pH supérieur à 7 indique une solution basique.

Ensemble, ces deux fonctions offrent une perspective unique pour résoudre une multitude de problèmes dans des domaines variés comme les sciences naturelles, l'ingénierie et l'économie.

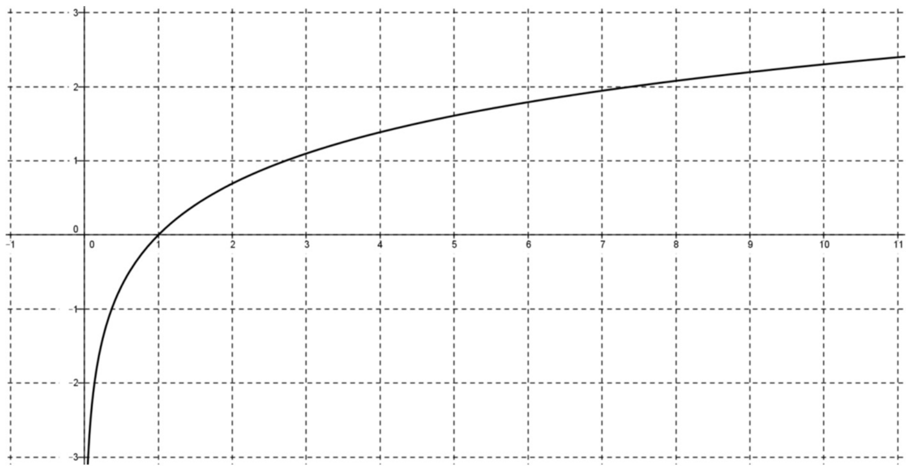
En explorant les propriétés des logarithmes et des exponentielles, en relevant des défis mathématiques, on peut découvrir les merveilles que ces fonctions peuvent révéler. En comprenant leur puissance, on acquiert une maîtrise plus profonde des mathématiques et une appréciation élargie du monde qui nous entoure.

Rappels de cours
Fonction logarithme et fonction exponentielle

1- Fonction logarithme népérien

1-1. Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction notée ln. Les premières propriétés sont les suivantes :
(1) La fonction ln est définie pour des réels x strictement positifs : $x \in]0 ; +\infty[$;
(2) La dérivée de la fonction ln est la fonction inverse : $(ln(x))' = \frac{1}{x}$;
(3) La fonction ln s'annule en 1 : $ln(1) = 0$.



1-2. Propriété fondamentale de la fonction logarithme

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$$

1-3. Autres règles de calcul

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

$$ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a) \; ; \; ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b) \; ; \; ln(a^n) = n \times ln(a) \; ; \; ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} ln(a)$$

Exercice 2

Résoudre dans IR l'inéquation suivante :

$$ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq 2$$

Solution

L'inéquation est définie pour les valeurs de x telles que :

$$\frac{x}{x-1} > 0$$

On sait que le signe de ce quotient est le même que le signe du produit $x(x-1)$.
D'après les rappels de la partie « **Prérequis essentiels** » on peut en déduire les valeurs de x telles que $x(x-1) > 0$ et donc le domaine de définition de cette inéquation.

L'inéquation est définie pour $x \in \left]-\infty\,;0\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$.

On résout cette inéquation en écrivant les équivalences suivantes :

$$ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} \leq e^2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - e^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(1-e^2)+e^2}{x-1} \leq 0$$

On établit le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		0		1		$\frac{e^2}{e^2-1}$		$+\infty$
$x(1-e^2)+e^2$		$+$				$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$			0	$+$		$+$	
$\frac{x(1-e^2)+e^2}{x-1}$		$-$	$\|$		$\|$	$+$	0	$-$	

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq 2 \text{ pour } x \in \left]-\infty\,;0\right[\cup \left[\frac{e^2}{e^2-1}\,;+\infty\right[.$$

$$S = \left]-\infty\,;0\right[\cup \left[\frac{e^2}{e^2-1}\,;+\infty\right[$$

Exercice 3

Résoudre dans IR l'inéquation suivante :

$$(ln\,x)^2 - ln\,x \leq 6$$

Solution

L'inéquation est définie pour $x \in]0\,; +\infty[$.
On pose $X = ln\,x$. L'inéquation s'écrit :

$$X^2 - X - 6 \leq 0$$

Le trinôme $X^2 - X - 6$ a deux racines évidentes : -2 et 3
On factorise ce trinôme :

$$X^2 - X - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (X+2)(X-3) \leq 0$$

On en déduit les solutions suivantes :

$$X^2 - X - 6 \leq 0 \text{ pour } X \in [-2\,; 3].$$

On écrit l'équivalence suivante :

$$-2 \leq X \leq 3 \;\Leftrightarrow -2 \leq lnx \leq 3 \Leftrightarrow e^{-2} \leq x \leq e^3$$

Finalement, $(ln\,x)^2 - ln\,x \leq 6$ pour $x \in [e^{-2}\,;\, e^3]$:

$$S = [e^{-2}\,;\, e^3]$$

Exercice 4

Déterminer la valeur du plus petit entier naturel n tel que :

1/ $(2{,}3)^n > 10^6$
2/ $(0{,}54)^n < 10^{-9}$

Solution

1/ On écrit les équivalences suivantes :

$$(2{,}3)^n > 10^6 \Leftrightarrow n\,ln(2{,}3) > 6\,ln(10) \Leftrightarrow n > 6\frac{ln(10)}{ln(2{,}3)} \approx 16{,}59$$

On choisit $n = 17$.

QCM de révisions

Consignes pour les QCM de révisions en Mathématiques

1. **Lisez attentivement chaque question** : Prenez le temps de comprendre ce qui est demandé dans chaque question. Assurez-vous de bien saisir ce qui est recherché avant de sélectionner une réponse.
2. **Réfléchissez aux solutions possibles** : Prenez le temps de réfléchir à la manière dont vous pouvez résoudre le problème proposé. Utilisez vos connaissances en Mathématiques pour identifier les différentes approches possibles.
3. **Utilisez vos calculs pour vérifier vos réponses** : Si possible, effectuez des calculs pour vérifier votre réponse. Assurez-vous que votre choix est logique et cohérent avec les principes Mathématiques.
4. **Revérifiez vos réponses avant de valider** : Avant de valider vos réponses, prenez le temps de relire chaque question et votre sélection. Assurez-vous que vous êtes satisfait de toutes vos réponses.
5. **Soyez attentif aux indications spécifiques** : Certains détails dans les questions peuvent fournir des indices sur la manière de résoudre le problème. Soyez attentif à ces indications pour vous guider dans votre réponse.
6. **Restez calme et concentré** : Gardez votre calme pendant que vous répondez aux questions. Si vous êtes bloqué sur une question, passez à la suivante et revenez-y plus tard si vous avez le temps.

En suivant ces consignes, vous maximiserez vos chances de répondre correctement à chaque question.

Une ou plusieurs bonnes réponses

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ **ont plusieurs bonnes réponses**. Les autres ont une unique bonne réponse. Indiquer la ou les bonnes réponses en noircissant la case correspondante au stylo à bille noir.

Pavés numériques

Les résultats numériques doivent être saisis dans des pavés numériques. Voici quelques exemples de réponses :

□0 ■1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9 □0 □1 □2 □3 ■4 □5 □6 □7 □8 □9 □0 □1 □2 ■3 □4 □5 □6 □7 □8 □9	Le pavé numérique ci-contre permet de saisir le résultat suivant : **143**
□0 □1 □2 ■3 □4 □5 □6 □7 □8 □9 . □0 ■1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9 □0 □1 □2 □3 ■4 □5 □6 □7 □8 □9	Le pavé numérique ci-contre permet de saisir le résultat suivant : **3,14**

QCM de révisions - Sujet 1
Fonctions logarithme et exponentielle

Ce sujet comporte 1 pages numérotées de 1/1 à 1/1. Les questions faisant apparaître le symbole ♣ ont plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. L'indiquer sur cette feuille en noircissant la case correspondante au stylo à bille noir. Aucune justification n'est demandée.

Question 1 ♣ Exprimer $4.ln(2) - 2.ln(3)$ sous la forme $ln(A)$. Alors A vaut :

☐ $\frac{16}{9}$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ $\frac{7}{9}+1$
☐ 7 ☐ $\frac{4}{3}$ ☐ 2

Question 2 L'ensemble des solutions S de l'inéquation $1 - xln2 \geq 0$ est :

☐ $\left[\frac{1}{ln2}; +\infty\right[$ ☐ $\left]-\infty; \frac{1}{ln2}\right]$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\left[0; \frac{1}{ln2}\right]$

Question 3 L'ensemble des solutions S de l'inéquation $1 - xln2 \leq 0$ est :

☐ $\left]-\infty; \frac{1}{ln2}\right]$ ☐ $\left[\frac{1}{ln2}; +\infty\right[$ ☐ $\left[\frac{1}{ln2}; 4\right]$ ☐ $\mathbb{R}$

Question 4 $x_1 = 1$ est une solution de l'équation : $ln(x+1)+ln(x+3) = ln(3x+5)$. Il existe une autre solution réelle à cette équation.

☐ FAUX ☐ VRAI

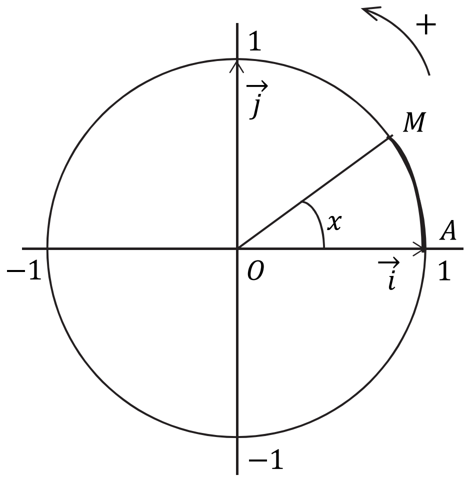
Question 5 La population d'une commune rurale diminue de 2% par an. Sa population aura diminué de moitié dans :

☐ 35 ans ☐ 30 ans ☐ 20 ans ☐ 15 ans

Rappels de cours
Trigonométrie

1- Mesures en radian d'un angle orienté

1-1. Définition



On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 et de centre O orienté dans le sens trigonométrique (sens inverse de celui des aiguilles d'une montre).
Soit A le point de coordonnées $A(1\,;0)$ et M un point quelconque du cercle trigonométrique. Une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OM}\right)$ est la longueur algébrique de l'arc de cercle défini entre les points A et M :

$$x = (\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OM})$$

Les mesures d'un angle orienté
Un angle orienté possède une infinité de mesures. Si x est l'une d'entre elles, les autres sont de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
En effet, le cercle trigonométrique, de rayon 1, a une circonférence égale à 2π. Par exemple, voici quelques mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OA})$:

➔ $(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OA}) = 0$;
➔ $(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OA}) = 2\pi$ (ici $k = 1$; on a parcouru le cercle dans le sens trigonométrique et on a ajouté un tour complet. Ceci positionne correctement le point A sur le cercle trigonométrique) ;
➔ $(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OA}) = -2\pi$;
➔ $(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OA}) = -4\pi$.

1-2. Mesure principale et angle géométrique

Parmi les mesures d'un angle orienté (ou d'un arc orienté) il en existe une, et une seule, appelée mesure principale appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OM}\right)$ correspond à l'angle géométrique formé entre les segments $[OA]$ et $[OM]$ du triangle OAM.

1-3. Les différentes unités utilisées

Les différentes unités utilisées sont :

➔ le radian, noté « rad » ;

➔ le degré, noté « $°$ » ;

➔ le grade ou le gon (gônia signifie angle en grec) noté « gon ».

Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Angle en degrés	0	30	45	60	90	180	360
Angle en grades	0	$\frac{100}{3}$	50	$\frac{200}{3}$	100	200	400

2- Les fonctions sinus, cosinus et tangente

2-1. Définitions

Soit $x = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ un angle orienté en radian. A chaque nombre réel x correspond un point M du cercle trigonométrique. Le point M a pour coordonnées $(x_M\ ;\ y_M)$.

On appelle x_M le **cosinus du nombre x**. Il s'agit de l'**abscisse** du point M dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.
On appelle y_M le **sinus du nombre x**. Il s'agit de l'**ordonnée** du point M dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Le point M a donc pour coordonnées $(\cos x\,;\sin x)$

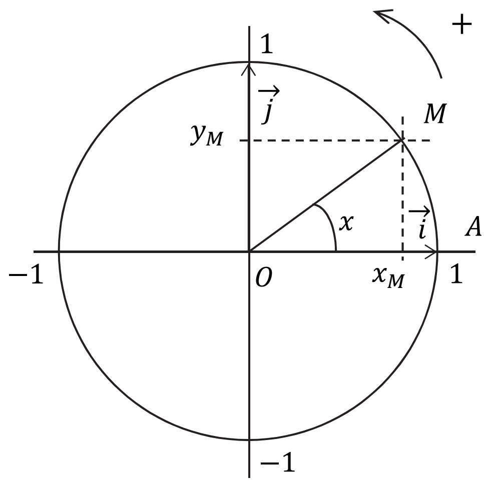
On définit ainsi les fonctions suivantes :

sinus : $\begin{cases} \mathrm{IR} \to [-1\,;1] \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$

cosinus : $\begin{cases} \mathrm{IR} \to [-1\,;1] \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$

Le théorème de Pythagore permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$



tangente :

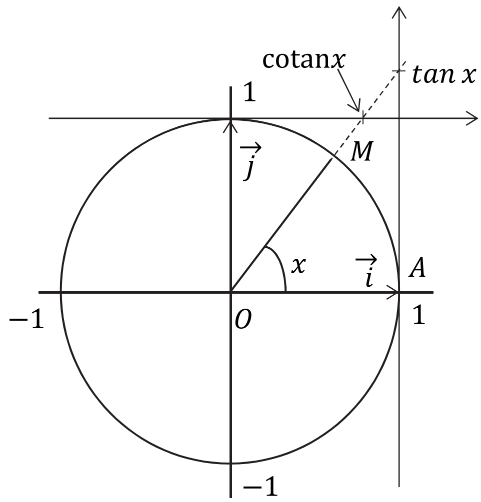
$$x \mapsto tan\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}$$

pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

cotangente :

$$x \mapsto cotan\, x = \frac{1}{tan\, x} = \frac{cos\, x}{sin\, x}$$

pour $x \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Remarques

(1) $tan\, x = \frac{y_M}{x_M}$ est la pente (ou le coefficient directeur) de la droite (OM).

(2) $tan\, x$ est l'ordonnée du point de la droite (OM) d'abscisse 1.

2-2. Valeurs remarquables de certains angles

Le tableau ci-dessous dresse la liste des valeurs remarquables à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$sin\, x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cos\, x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$tan\, x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non définie	0

2-3. Formules de transformation

Pour tout $x \in \mathrm{IR}$, on a la relation suivante : $cos^2\, x + sin^2\, x = 1$.

2-3.1 Formules d'addition

Pour tout $a \in \mathrm{IR}$, $b \in \mathrm{IR}$ on a les relations suivantes :

$cos(\,a + b) = cos\, a\, cos\, b - sin\, a\, sin\, b$; $cos(\,a - b) = cos\, a\, cos\, b + sin\, a\, sin\, b$

$sin(\,a + b) = sin\, a\, cos\, b + sin\, b\, cos\, a$; $sin(\,a - b) = sin\, a\, cos\, b - sin\, b\, cos\, a$

Pour a et b appartenant au domaine de définition de la fonction tangente :

$$tan(\,a + b) = \frac{tan\, a + tan\, b}{1 - tan\, a\, tan\, b}\ ;\ tan(\,a - b) = \frac{tan\, a - tan\, b}{1 + tan\, a\, tan\, b}$$

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

1/ A partir de la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et en utilisant les formules de duplication, calculer les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2/ Vérifier que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$. En utilisant les formules d'addition, calculer les valeurs exactes de $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Solution

1/ On connaît la valeur exacte suivante :

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On utilise la formule de duplication : $cos\, 2x = 2\, cos^2\, x - 1$. On effectue le calcul suivant :

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\, cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 \Leftrightarrow cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

On ne retient que la valeur positive. On obtient :

$$cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

On utilise la formule de duplication : $cos\, 2\, x = 1 - 2\, sin^2\, x$. On effectue le calcul suivant :

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\, sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

On ne retient que la valeur positive. On obtient :

$$sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

QCM de révisions

Consignes pour les QCM de révisions en Mathématiques

1. **Lisez attentivement chaque question** : Prenez le temps de comprendre ce qui est demandé dans chaque question. Assurez-vous de bien saisir ce qui est recherché avant de sélectionner une réponse.
2. **Réfléchissez aux solutions possibles** : Prenez le temps de réfléchir à la manière dont vous pouvez résoudre le problème proposé. Utilisez vos connaissances en Mathématiques pour identifier les différentes approches possibles.
3. **Utilisez vos calculs pour vérifier vos réponses** : Si possible, effectuez des calculs pour vérifier votre réponse. Assurez-vous que votre choix est logique et cohérent avec les principes Mathématiques.
4. **Revérifiez vos réponses avant de valider** : Avant de valider vos réponses, prenez le temps de relire chaque question et votre sélection. Assurez-vous que vous êtes satisfait de toutes vos réponses.
5. **Soyez attentif aux indications spécifiques** : Certains détails dans les questions peuvent fournir des indices sur la manière de résoudre le problème. Soyez attentif à ces indications pour vous guider dans votre réponse.
6. **Restez calme et concentré** : Gardez votre calme pendant que vous répondez aux questions. Si vous êtes bloqué sur une question, passez à la suivante et revenez-y plus tard si vous avez le temps.

En suivant ces consignes, vous maximiserez vos chances de répondre correctement à chaque question.

Une ou plusieurs bonnes réponses

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ **ont plusieurs bonnes réponses**. Les autres ont une unique bonne réponse. Indiquer la ou les bonnes réponses en noircissant la case correspondante au stylo à bille noir.

Pavés numériques

Les résultats numériques doivent être saisis dans des pavés numériques. Voici quelques exemples de réponses :

☐0 ■1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐0 ☐1 ☐2 ■3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9	Le pavé numérique ci-contre permet de saisir le résultat suivant : **143**
☐0 ☐1 ☐2 ■3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 . ☐0 ■1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9	Le pavé numérique ci-contre permet de saisir le résultat suivant : **3,14**

QCM de révisions - Sujet 1
Trigonométrie

Ce sujet comporte 2 pages numérotées de 1/2 à 2/2. Les questions faisant apparaître le symbole ♣ ont plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. L'indiquer sur cette feuille en noircissant la case correspondante au stylo à bille noir. Aucune justification n'est demandée.

Question 1
Convertir l'angle $\frac{5}{7}.\pi$ radians en grades, en valeur décimale arrondie si besoin à l'unité. Indiquer la réponse obligatoirement en 3 chiffres, un par ligne (centaines, dizaines, unités).

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Question 2 ♣ Le triangle ABC est rectangle en A. Donner BC :

- ☐ $AC.cos(\hat{C})$
- ☐ $AB.cos(\hat{B})$
- ☐ $\frac{AC}{sin(\hat{B})}$
- ☐ $\frac{AB}{sin(\hat{C})}$
- ☐ $\frac{AC}{cos(\hat{C})}$
- ☐ $AC.sin(\hat{B})$
- ☐ $AC.tan(\hat{B})$
- ☐ $AB.tan(\hat{C})$
- ☐ $\frac{AB}{cos(\hat{B})}$
- ☐ $AB.sin(\hat{C})$

Question 3 La liste complète des solutions de l'équation $cos(x) = 0{,}25$ est :

- ☐ $x = Arccos(0{,}25) + 2k\pi \ ou \ x = -Arccos(0{,}25) + 2k\pi$
- ☐ $x = Arccos(0{,}25) + 2k\pi \ ou \ x = \pi - Arccos(0{,}25) + 2k\pi$
- ☐ $x = Arccos(0{,}25) + 2k\pi \ ou \ x = \pi + Arccos(0{,}25) + 2k\pi$
- ☐ $x = Arccos(0{,}25) + 2k\pi$

Question 4
Soit ABC un triangle quelconque. On donne $\hat{C} = 54{,}529$ degrés, BC = 77,816 m et AC = 152,995 m. Calculer la distance AB puis arrondir à 10^{-1} près. Indiquer la réponse obligatoirement en 4 chiffres, un par ligne (centaines, dizaines, unités, dixièmes).

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
.
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Question 5
Soit ABC un triangle quelconque. On donne $\hat{C} = 31{,}655$ degrés, BC = 129,069 m et AC = 78,688 m. Calculer l'angle $\hat{A}$ en degrés puis arrondir à 10^{-1} près. Indiquer la réponse obligatoirement en 4 chiffres, un par ligne (centaines, dizaines, unités, dixièmes).

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
.
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Rappels de cours
Géométrie dans le plan

Pour l'ensemble de cette partie, on définit un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$: $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1- Coordonnées et norme d'un vecteur

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan $\mathcal{P}$. On rappelle les définitions suivantes :

➔ Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{matrix}\right.$

➔ Norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Remarque

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$; la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la distance AB.

2- Produit scalaire

2-1. Formulation du produit scalaire

2-1.1 Expression analytique

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ a l'expression suivante :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x.x' + y.y'$ avec $\vec{u}\left|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix}x'\\ y'\end{matrix}\right.$, dans un repère orthonormé.

Remarque

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$$

2-1.2 Expression géométrique

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ a l'expression suivante :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,,\vec{v})$$

où $(\vec{u}\,,\vec{v})$ est l'angle orienté formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2-2. Orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan $\mathcal{P}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

2-3. Vecteur normal à une droite dans le plan

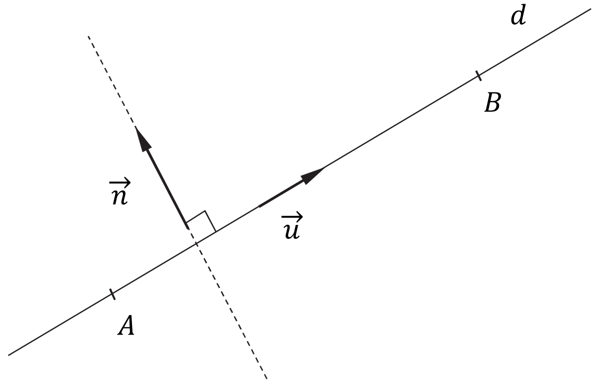
Définition

Un vecteur normal $\vec{n}$ à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.

Remarques

(1) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

(2) Pour déterminer un vecteur normal $\vec{n}$, on choisit des coordonnées qui vérifient la condition : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.



Exemple

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan $\mathcal{P}$:

➔ Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{matrix}\right.$

➔ Coordonnées du vecteur normal $\vec{n}$: $\vec{n}\left|\begin{matrix} -(y_B - y_A) \\ x_B - x_A \end{matrix}\right.$

Le vecteur $\vec{n}$ vérifie bien la condition : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

3- Equations cartésiennes dans le plan

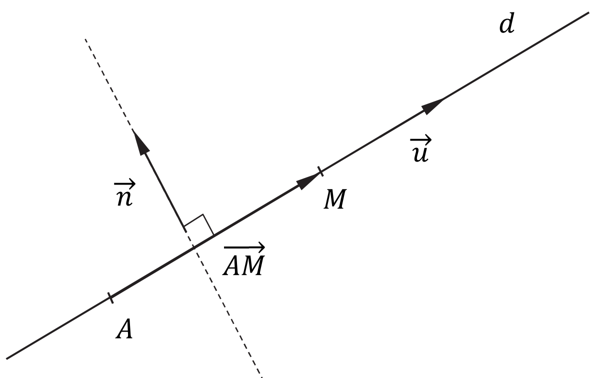
3-1. Caractérisation d'une droite dans le plan

Soit d une droite, $A(x_A\,;y_A)$ un point de d et $\vec{n}$ un vecteur normal à la droite d.

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

On a l'équivalence suivante :

$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$



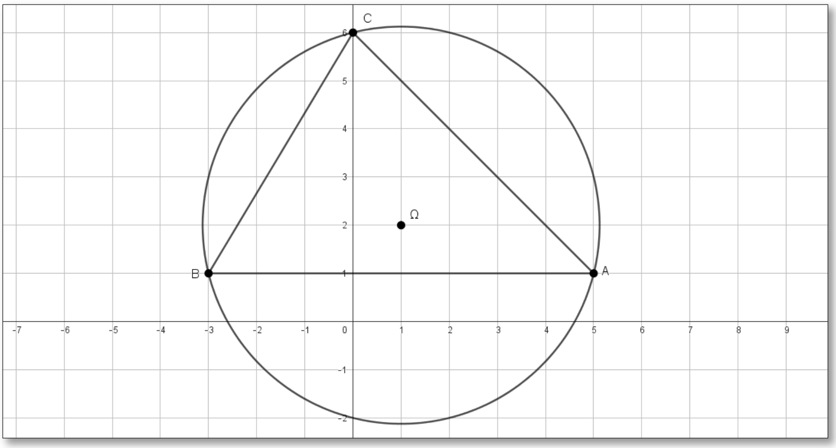
La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient orthogonaux.

Exercice 7

On donne les coordonnées des points $A(5\,;1)$, $B(-3\,;1)$ et $C(0\,;6)$. Le but de cet exercice est de trouver une équation du cercle Γ circonscrit au triangle ABC. On note Ω le centre de Γ. On sait que le cercle Γ a une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

1/ En traduisant le fait que les points A, B et C sont trois points du cercle Γ, déterminer un système de trois équations à trois inconnues et résoudre ce système.
2/ Déterminer alors une équation du cercle Γ. Précisez les coordonnées de son centre Ω et son rayon R.



Solution

1. On remplace les coordonnées des points dans l'équation donnée :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 5a + b + c = -26 \\ -3a + b + c = -10 \\ 6b + c = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \\ c = -12 \end{cases}$$

2. On en déduit l'équation du cercle Γ :

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + (y-2)^2 - 17 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + (y-2)^2 = 17 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un cercle de centre $\Omega(1\,;2)$ et de rayon $R = \sqrt{17}$.

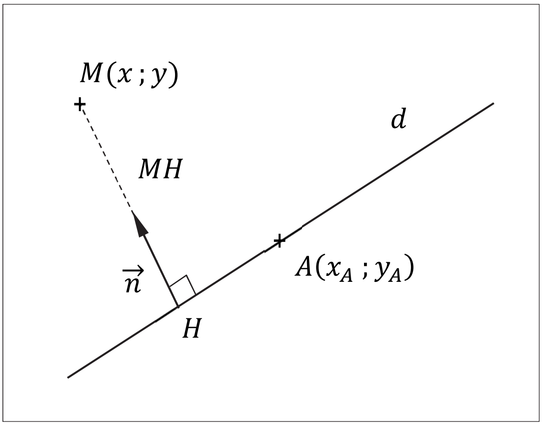
Exercice 8

On considère la droite d d'équation :

$$ax + by + c = 0$$

Le point $A(x_A\,;y_A)$ est un point de d et $M(x\,;y)$ est un point du plan. On note H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.

Le but de cet exercice est de déterminer la distance du point M à la droite d en fonction des coordonnées de $M(x\,;y)$ et des réels a, b et c.



1/ Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite d.

2/ Calculer $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|$

3/ Montrer que $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right| = MH \times \|\vec{n}\|$

4/ En déduire l'expression de la distance du point M à la droite d en fonction des coordonnées de $M(x\,;y)$ et des réels a, b et c.

Solution

1/ Par lecture des coefficients : $\vec{n}\ (a\,;b)$ est un vecteur normal à la droite d.

2/ On calcule le produit scalaire suivant :

$$\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right| = \left|\begin{vmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\right| = |a(x - x_A) + b(y - y_A)|$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right| = |ax + by - ax_A - by_A|$$

$A \in d$, ce qui permet d'écrire l'égalité suivante :

$$ax_A + by_A + c = 0 \Leftrightarrow -ax_A - by_A = c$$

Finalement :

$$\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right| = |ax + by - ax_A - by_A| = |ax + by + c|$$

3/ On écrit la somme vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$$

avec $\overrightarrow{AH}$ orthogonal à $\vec{n}$ et $\overrightarrow{HM}$ colinéaire à $\vec{n}$.

QCM de révisions

Consignes pour les QCM de révisions en Mathématiques

1. **Lisez attentivement chaque question** : Prenez le temps de comprendre ce qui est demandé dans chaque question. Assurez-vous de bien saisir ce qui est recherché avant de sélectionner une réponse.
2. **Réfléchissez aux solutions possibles** : Prenez le temps de réfléchir à la manière dont vous pouvez résoudre le problème proposé. Utilisez vos connaissances en Mathématiques pour identifier les différentes approches possibles.
3. **Utilisez vos calculs pour vérifier vos réponses** : Si possible, effectuez des calculs pour vérifier votre réponse. Assurez-vous que votre choix est logique et cohérent avec les principes Mathématiques.
4. **Revérifiez vos réponses avant de valider** : Avant de valider vos réponses, prenez le temps de relire chaque question et votre sélection. Assurez-vous que vous êtes satisfait de toutes vos réponses.
5. **Soyez attentif aux indications spécifiques** : Certains détails dans les questions peuvent fournir des indices sur la manière de résoudre le problème. Soyez attentif à ces indications pour vous guider dans votre réponse.
6. **Restez calme et concentré** : Gardez votre calme pendant que vous répondez aux questions. Si vous êtes bloqué sur une question, passez à la suivante et revenez-y plus tard si vous avez le temps.

En suivant ces consignes, vous maximiserez vos chances de répondre correctement à chaque question.

Une ou plusieurs bonnes réponses

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ **ont plusieurs bonnes réponses**. Les autres ont une unique bonne réponse. Indiquer la ou les bonnes réponses en noircissant la case correspondante au stylo à bille noir.

Pavés numériques

Les résultats numériques doivent être saisis dans des pavés numériques. Voici quelques exemples de réponses :

☐0 ■1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐0 ☐1 ☐2 ■3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9	Le pavé numérique ci-contre permet de saisir le résultat suivant : **143**
☐0 ☐1 ☐2 ■3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 . ☐0 ■1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9	Le pavé numérique ci-contre permet de saisir le résultat suivant : **3,14**

QCM de révisions - Sujet 1
Géométrie dans le plan

Ce sujet comporte 2 pages numérotées de 1/2 à 2/2. Les questions faisant apparaître le symbole ♣ ont plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. L'indiquer sur cette feuille en noircissant la case correspondante au stylo à bille noir. Aucune justification n'est demandée.

Question 1 ♣ Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne les points : A$(4;2)$ et B$(8;5)$. Un vecteur normal à la droite (AB) est :

- ☐ $\overrightarrow{n}(3;4)$
- ☐ $\overrightarrow{n}(4;3)$
- ☐ $\overrightarrow{n}(-4;-3)$
- ☐ $\overrightarrow{n}(3;-4)$
- ☐ $\overrightarrow{n}(-3;4)$

Question 2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne les points : A$(4;2)$ et B$(8;5)$. Soit C$(52;y)$ un point de la droite (AB). Calculer la valeur de y : Indiquer la réponse obligatoirement en 2 chiffres, un par ligne (dizaines, unités).

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

Question 3 ♣ Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne le point D$(6;-1)$.
L'équation de la droite Δ passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(10;3)$ est :

- ☐ $-3x + 10y + 28 = 0$
- ☐ $4x - 3y - 27 = 0$
- ☐ $3x - 10y - 28 = 0$
- ☐ $-3x + 4y + 22 = 0$
- ☐ $3x + 10y - 8 = 0$
- ☐ $10x + 3y - 57 = 0$

Question 4 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne les points : A$(4; 2)$; B$(8; 5)$ et D$(6; -1)$. L'équation de la droite Γ parallèle à la droite (AB) et passant par le point D est :

- ☐ $-3x + 4y + 22 = 0$
- ☐ $3x + 4y - 14 = 0$
- ☐ $4x + 3y - 21 = 0$
- ☐ $-4x + 3y + 27 = 0$

Question 5 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne les points : A$(4; 2)$; B$(8; 5)$ et D$(6; -1)$. L'équation de la droite Φ perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le point D est :

- ☐ $3x - 4y - 22 = 0$
- ☐ $3x + 4y - 14 = 0$
- ☐ $-4x + 3y + 27 = 0$
- ☐ $-4x - 3y + 21 = 0$

Question 6 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne les points : A$(-3; -2)$ et B$(3; 2)$. L'ensemble des points M$(x; y)$ vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 12$ est :

- ☐ Le cercle de centre B et de rayon R = 5.
- ☐ Le cercle de centre B et de rayon R = 25.
- ☐ Le cercle de centre A et de rayon R = 25.
- ☐ Le cercle de centre A et de rayon R = 5.

Rappels de cours
Généralités sur les fonctions

1- Définitions

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Définition d'une fonction

Une fonction numérique f est une application qui, à tout réel x de son ensemble de définition D_f associe un unique nombre $y = f(x)$, appelée image de x par f.

$$f:\begin{cases} D_f \subset \mathrm{IR} \to \mathrm{IR} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Courbe représentative

La courbe représentative d'une fonction f, notée C_f, correspond à l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f\,(x))$ pour $x \in D_f$.

Symétries

➔ Si f est paire si, et seulement si :

$$\text{pour tout } x \in D_f,\ -x \in D_f \ \text{ et } f(-x) = f(x)$$

La courbe représentative C_f est symétrique par rapport à l'axe (Oy).

➔ Si f est impaire si, et seulement si :

$$\text{pour tout } x \in D_f,\ -x \in D_f \ \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

La courbe représentative C_f est symétrique par rapport à O, l'origine du repère.

2- Continuité et dérivabilité d'une fonction

2-1. Continuité d'une fonction

➔ Continuité en un point a :

Une fonction f est continue en un point $a \in D_f$ si, et seulement si :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$$

On écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

➔ Continuité sur I :

Une fonction f est continue sur un intervalle $I \subset D_f$ si elle est continue en tout point $a \in I$.

2-2. Dérivabilité d'une fonction

➔ Dérivabilité en un point a :

Une fonction f est dérivable en un point $a \in D_f$ si le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a une limite finie lorsque x tend vers a.

On note alors :

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

On écrit :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Autre écriture :

En posant $h = x - a$, on obtient :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

➔ Dérivabilité sur un intervalle I :

Une fonction f est dérivable sur un intervalle $I \subset D_f$ si elle est dérivable en tout point $a \in I$.

2-3. Différentielle d'une fonction

Soit f une fonction dérivable en a, alors : $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Il est équivalent d'écrire : $f(a + h) - f(a) = hf'(a) + h\varepsilon(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

On pose : $\Delta_{a,h}(f) = f(a + h) - f(a)$

$\Delta_{a,h}(f)$ est la différence des ordonnées de deux points de la courbe C_f d'abscisses $a + h$ et a.

On a alors : $\Delta_{a,h}(f) = hf'(a) + h\varepsilon(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

2-3.1 Définition de la différentielle d'une fonction

La différentielle de la fonction f au point d'abscisse a est la fonction :

$$df_a : h \mapsto hf'(a)$$

$df_a(h) = hf'(a)$ est la différence entre l'ordonnée du point d'abscisse $a + h$ de la tangente T et l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe C_f.

Remarque

Lorsque h est très petit, $\Delta_{a,h}(f) \approx df_a(h)$

Exercice 6

On souhaite étudier les fonctions, notées f_k, solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y' + y = e^{-x}$$

k étant un nombre réel donné, f_k est la fonction définie sur l'ensemble IR par :

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1/ Déterminer les limites de f_k en $+\infty$ et en $-\infty$.
2/ Calculer $f_k{}'(x)$ pour tout réel x.
3/ En déduire le tableau de variations de f_k.
4/ Tracer la représentation graphique de la fonction f_2.

Solution

1. On calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty} (x + k)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x + k)}{e^x}$$

avec, d'après le théorème des croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à C_k en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} (x + k)e^{-x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty$$

2/ On calcule la fonction dérivée :

$$f_k{}'(x) = e^{-x} - (x + k)e^{-x} = (1 - k - x)e^{-x}$$

$$f_k{}'(x) = (1 - k - x)e^{-x}$$

La dérivée est positive pour $x \in]-\infty\,; 1 - k[$ et négative pour $x \in]1 - k\,; +\infty[$

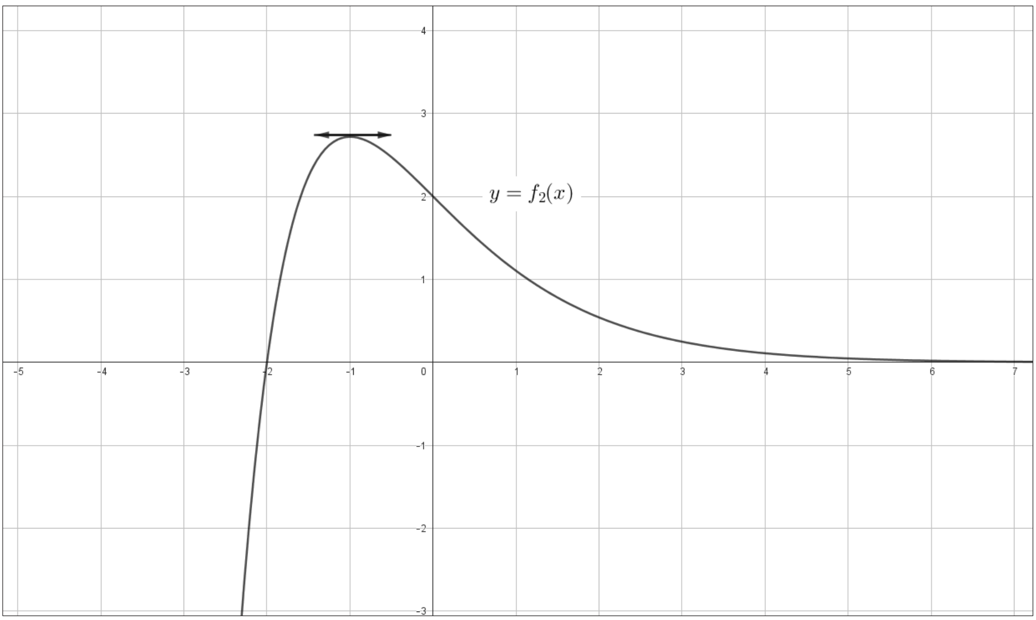
3/ Tableau de variations de la fonction f_k :

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{k-1}	$\searrow$	0

4/ Pour $k = 2$, on obtient :

$$f_2(x) = (x+2)e^{-x}$$

Représentation graphique de la fonction f_2 :



QCM de révisions

Consignes pour les QCM de révisions en Mathématiques

1. **Lisez attentivement chaque question** : Prenez le temps de comprendre ce qui est demandé dans chaque question. Assurez-vous de bien saisir ce qui est recherché avant de sélectionner une réponse.
2. **Réfléchissez aux solutions possibles** : Prenez le temps de réfléchir à la manière dont vous pouvez résoudre le problème proposé. Utilisez vos connaissances en Mathématiques pour identifier les différentes approches possibles.
3. **Utilisez vos calculs pour vérifier vos réponses** : Si possible, effectuez des calculs pour vérifier votre réponse. Assurez-vous que votre choix est logique et cohérent avec les principes Mathématiques.
4. **Revérifiez vos réponses avant de valider** : Avant de valider vos réponses, prenez le temps de relire chaque question et votre sélection. Assurez-vous que vous êtes satisfait de toutes vos réponses.
5. **Soyez attentif aux indications spécifiques** : Certains détails dans les questions peuvent fournir des indices sur la manière de résoudre le problème. Soyez attentif à ces indications pour vous guider dans votre réponse.
6. **Restez calme et concentré** : Gardez votre calme pendant que vous répondez aux questions. Si vous êtes bloqué sur une question, passez à la suivante et revenez-y plus tard si vous avez le temps.

En suivant ces consignes, vous maximiserez vos chances de répondre correctement à chaque question.

Une ou plusieurs bonnes réponses

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ **ont plusieurs bonnes réponses**. Les autres ont une unique bonne réponse. Indiquer la ou les bonnes réponses en noircissant la case correspondante au stylo à bille noir.

Pavés numériques

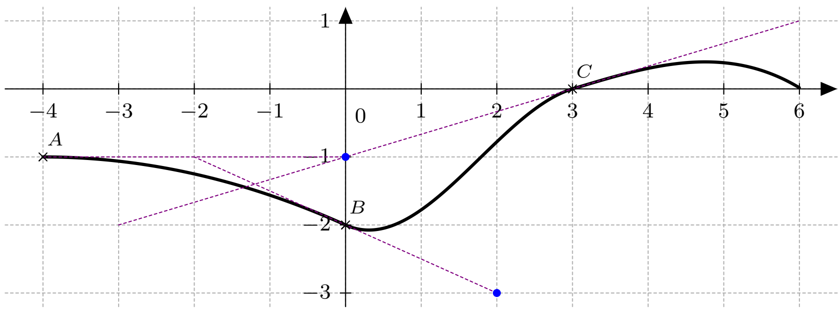
Les résultats numériques doivent être saisis dans des pavés numériques. Voici quelques exemples de réponses :

☐0 ■1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐0 ☐1 ☐2 ■3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9	Le pavé numérique ci-contre permet de saisir le résultat suivant : **143**
☐0 ☐1 ☐2 ■3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 . ☐0 ■1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9	Le pavé numérique ci-contre permet de saisir le résultat suivant : **3,14**

QCM de révisions - Sujet 1
Généralités sur les fonctions

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3. Les questions faisant apparaître le symbole ♣ ont plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. L'indiquer sur cette feuille en noircissant la case correspondante au stylo à bille noir. Aucune justification n'est demandée.

Les 5 questions suivantes portent sur le graphique ci-dessous : on a représenté dans un repère la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-4; 6]$ ainsi que ses tangentes aux points A, B et C.



Question 1 $f'(0) =$

☐ -2 ☐ 0 ☐ -1 ☐ $-0{,}5$

Question 2 Une équation de la tangente à la courbe au point C est:

☐ $y = 3x - 1$ ☐ $y = \frac{1}{3}x - 1$ ☐ $y = \frac{1}{3}x - 3$ ☐ $y = 3x - 3$

Question 3

☐ f' est négative sur $[-4; 2]$
☐ f' est positive sur $[1; 4]$
☐ Aucune des autres réponses
☐ f' est positive sur $[4; 6]$

Question 4 $f'(-4) =$

- ☐ 0
- ☐ -1
- ☐ 4
- ☐ $\frac{1}{4}$

Question 5 Sur l'intervalle $[1;2]$,

- ☐ f' change de signe
- ☐ $f'(x) < 0$
- ☐ Aucune des autres réponses
- ☐ $f'(x) > 0$

Fin des 5 questions portant sur le graphique

Question 6 La dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{-3x+4}$ est :

- ☐ $f'(x) = \frac{-1}{(-3x+4)^2}$
- ☐ $f'(x) = \frac{1}{(-3x+4)^2}$
- ☐ $f'(x) = \frac{-3}{(-3x+4)^2}$
- ☐ $f'(x) = \frac{3}{(-3x+4)^2}$

Question 7 La dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{9\}$ par $f(x) = \dfrac{4}{x-9}$ est:

- ☐ $f'(x) = \dfrac{4}{(x-9)^2}$
- ☐ Aucune des autres réponses
- ☐ $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-9)^2}$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{32}{(x-9)^2}$

Question 8 Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin(\sin(x))$. Trouvez l'expression de $f'(x)$?

- ☐ $\sin(x)\sin(\cos(x))$
- ☐ $-\cos(x)\sin(\sin(x))$
- ☐ $\cos(x)\cos(\sin(x))$
- ☐ $-\sin(x)\cos(\cos(x))$

Question 9 Parmi les fonctions suivantes, laquelle est la dérivée de $x \mapsto x^7e^x$?

- ☐ $7x^7e^x + x^6e^x$
- ☐ $7x^6e^x$
- ☐ $e^x(x^7 + 7x^6)$
- ☐ $e^{7x}x^6$

Rappels de cours
Fonctions réciproques

1- Images et antécédents

On considère une fonction f définie sur son ensemble de définition D_f et à valeurs dans IR.

Définitions

➔ Soit x un élément de D_f ; on appelle image de x par f le nombre $y = f(x)$.

➔ Soit y un nombre réel ; on appelle antécédent de y par f tout nombre $x \in D_f$ tel que $y = f(x)$.

➔ On appelle image de f, et on note $Im\, f$, l'ensemble des nombres réels ayant au moins un antécédent par f.

Exemple

Pour la fonction $f : x \mapsto cos\, x$, l'image de f est : $Im\, f = [-1\,;1]$.

2- Fonction bijective

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition D_f. On définit deux intervalles : $I \subset D_f$ et $J \subset$ IR.

Définition

On dit que f est bijective de I vers J si tout nombre $y \in J$ n'admet qu'un seul et unique antécédent $x \in I$ par f.

Exemples

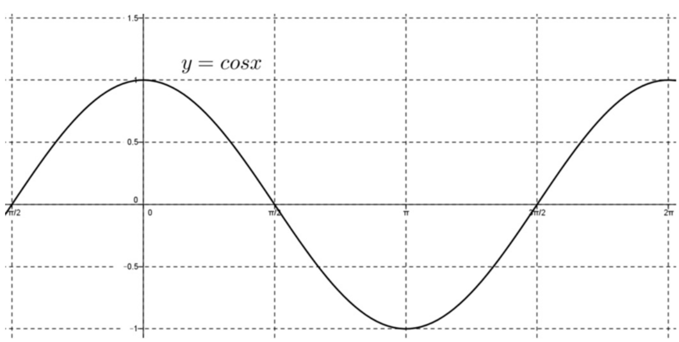
➔ La fonction $f : x \mapsto cos\, x$ n'est pas bijective de IR vers IR car $1{,}4$ n'admet aucun antécédent par f dans IR.

➔ La fonction $f : x \mapsto cos\, x$ n'est pas bijective de IR vers $[-1\,;1]$ car $0{,}5$ admet une infinité d'antécédents par f dans IR. Il s'agit des réels :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

➔ La fonction $f : x \mapsto cos\, x$ est bijective de $[0\,;\pi]$ vers $[-1\,;1]$ car pour tout $y \in [-1\,;1]$, il n'existe qu'un seul et unique antécédent $x \in [0\,;\pi]$ tel que $y = cos\, x$.

Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto cos\, x$:



3- Fonction réciproque

Soit f une fonction bijective de $I \subset D_f$ vers $J \subset \mathrm{IR}$.

3-1. Définition

On appelle fonction réciproque de la fonction f et on note f^{-1} la fonction définie sur J et qui, à tout nombre $y \in J$, associe son antécédent $x \in I$ par f.

Remarque
La fonction f^{-1} est également une fonction bijective et sa fonction réciproque est f.

Exemple
La fonction $f : x \mapsto cos\, x$ est bijective de $[0\,;\pi]$ vers $[-1\,;1]$.
Sa fonction réciproque est : $f^{-1} : x \mapsto Arccos\, x$ et f^{-1} est bijective de $[-1\,;1]$ vers $[0\,;\pi]$.

3-2. Propriétés fondamentales

Soit f une fonction bijective de $I \subset D_f$ vers $J \subset \mathrm{IR}$ et f^{-1} sa fonction réciproque. On rappelle les propriétés suivantes :
(1) $D_{f^{-1}} = J$ et $Imf^{-1} = I$

(2) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \forall x \in I, \quad \forall\, y \in J$

(3) $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in I$

(4) $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in J$

Exemple
On considère les fonctions $ln\, x$ et e^x. La fonction $f : x \mapsto ln\, x$ est bijective de IR^{+*} vers IR et sa fonction réciproque $f^{-1} : y \mapsto e^y$ est définie sur IR et à valeurs dans IR^{+*}.

On a les relations suivantes :
(1) $y = ln(\,x) \Leftrightarrow x = e^y \quad \forall\, x \in\ \mathrm{IR}^{+*}, \forall\, y \in \mathrm{IR}$

(2) $e^{ln\, x} = x \quad \forall\, x \in \mathrm{IR}^{+*}$

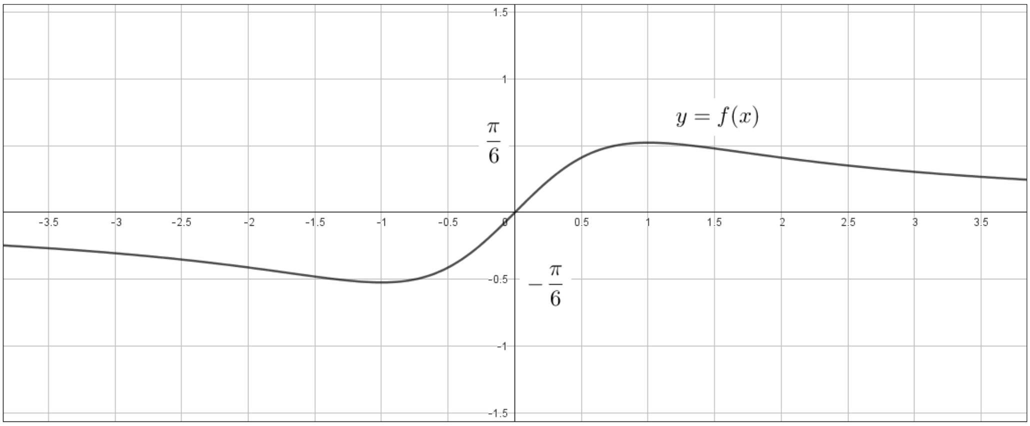
(3) $ln(e^y) = y \quad \forall\, y \in \mathrm{IR}$

3-3. Théorème

Si f une fonction continue et strictement monotone sur $I \subset D_f$ alors f est bijective de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$.
De plus sa fonction réciproque f^{-1} est :

- définie et continue sur J ;
- strictement monotone sur J avec le même sens de variation que f.

5/ Représentation graphique C_f de la fonction f :



Exercice 6

On considère la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right)$$

et C_f sa représentation graphique relative à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

1/ Déterminer les images de 0 et de 4 par f , puis l'antécédent de 0 par f

2/ Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$

3/ Montrer que, pour tout réel x :

$$x + \sqrt{x^2 + 9} = \frac{9}{\sqrt{x^2 + 9} - x}$$

En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$

4/ Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

En déduire le tableau de variations de la fonction f.

5/ On considère la fonction g définie, pour tout x réel, par :

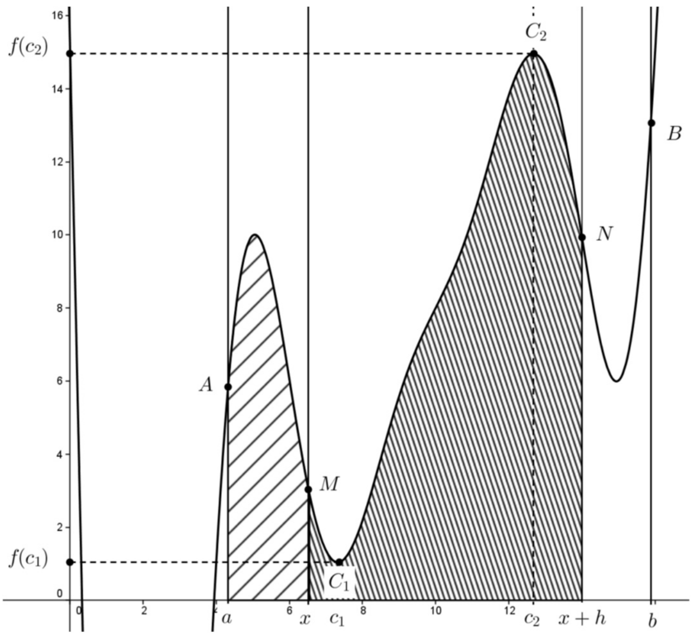
$$g(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{9}{2}e^{-x}$$

et C_g sa représentation graphique dans le même repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Rappels de cours
Calcul intégral

1- Aires et primitives

On considère une fonction f positive et continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et on note C_f sa représentation graphique.



Soit x un réel quelconque de l'intervalle $]a\,;b\,[$. On note $G(x)$ l'aire du domaine hachuré sur la figure. La différence $G(x+h)-G(x)$ est l'aire du domaine grisé sur la figure. On note c_1 et c_2 les abscisses respectives du minimum et du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[x\,;x+h]$. La différence $G(x+h)-G(x)$ est encadrée par les aires de deux rectangles de même base h et de hauteur $f(c_1)$ pour l'un et $f(c_2)$ pour l'autre. On obtient donc l'encadrement suivant :

$$hf(c_1) \leq G(x+h)-G(x) \leq hf(c_2)$$

En divisant par h on obtient :

$$f(c_1) \leq \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq f(c_2)$$

Lorsque h tend vers 0, les nombres c_1 et c_2 tendent vers x donc $f(c_1)$ et $f(c_2)$ tendent vers $f(x)$ car la fonction f est continue au point d'abscisse x.
Par conséquent :

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x)$$

Ce qui signifie que la fonction G est dérivable au point x et que $G'(x) = f(x)$. On dit que G est une primitive de f et comme $G(a) = 0$, G est la primitive de la fonction f qui s'annule en a. On utilise la notation suivante :

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

1-1. Primitive d'une fonction

On appelle primitive d'une fonction f continue sur un intervalle I toute fonction F dérivable sur I et de dérivée f :

$$F'(x) = f(x)$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est la primitive de f qui s'annule pour $x = a$

Remarque
Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

En effet, si f est continue sur I alors F est dérivable sur I, de dérivée f. Une fonction dérivable est continue donc F est continue sur I.

1-2. Nombre de primitives d'une fonction

Deux primitives d'une même fonction f diffèrent d'une constante. Si $F' = G' = f$ alors $F = G + C$ où C est une constante réelle.

Remarques
(1) Une primitive est définie sur un seul intervalle et non sur une réunion d'intervalles.
(2) Il n'existe qu'une seule primitive qui prend la valeur y_0 pour une valeur $x_0 \in I$ donnée.

Exemples
1. Détermination d'une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I_1 =]0\,;+\infty[$:
$F_1(x) = ln(x)$ est une primitive de f sur $I_1 =]0\,;+\infty[$
En effet, $F_1'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

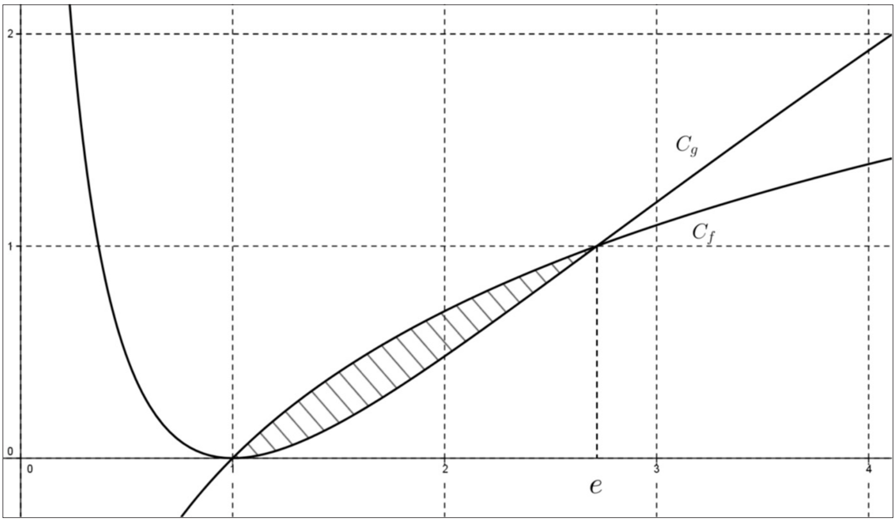
2. Détermination d'une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I_2 =]-\infty;0[$:
$F_2(x) = ln(-x)$ est une primitive de f sur $I_2 =]-\infty\,;0\,[$
En effet, $F_2'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} = f(x)$.

On écrit en général que $F(x) = ln|x|$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur I_1 ou sur I_2 mais pas sur $I_1 \cup I_2$

Exercice 8

Les courbes C_f et C_g du graphique ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = ln\,x \text{ et } g(x) = (ln\,x)^2$$



On cherche à déterminer l'aire S (en unités d'aire) de la partie hachurée du plan.
On note :

$$I = \int_1^e ln\,x\,dx$$

et

$$J = \int_1^e (ln\,x)^2 dx$$

1/ Calculer l'intégrale I.

2-1/ Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e - 2I$.

2-2/ En déduire J.

3/ Calculer la valeur de l'aire S.

4/ Pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;e]$, on note M le point de la courbe C_f d'abscisse x et N le point de la courbe C_g de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Cet ouvrage a été achevé en mai 2024
Dépôt légal : mai 2024
Déposé auprès de la BnF (Bibliothèque Nationale de France)