

José OUIN

Ingénieur INSA Toulouse
Ancien élève de l'ENS Cachan
Professeur Agrégé de Génie civil
Professeur Agrégé de Mathématiques

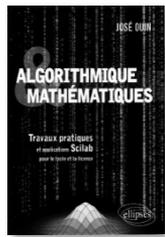
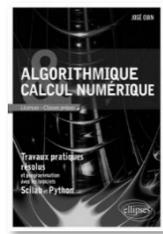
Mécanique des structures par la pratique

Rappels de cours et exercices corrigés

BTS, IUT(Bachelor), Licence, Master, Écoles d'ingénieurs,
CAPET, Agrégation.



Du même auteur aux Editions Ellipses et Educative



ISBN : 978-2-9592760-1-9
© José OUIN – 2024



Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.
La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayant cause, est illicite" (alinéa 1^{er} de l'article 40).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'auteur ou du Centre français du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Avant-Propos

Dans le vaste champ des disciplines scientifiques, la mécanique occupe une place fondamentale. Elle constitue le socle sur lequel s'appuient nombre de phénomènes technologiques, qu'ils relèvent de la productique, du génie civil, du génie énergétique, de la maintenance, et bien d'autres domaines encore.

Tout comme pour d'autres matières scientifiques, enseigner la mécanique demande une structuration rigoureuse du cours, accompagnée d'une panoplie d'exercices en lien direct avec les concepts abordés. C'est dans cette optique que j'ai entrepris la conception de cet ouvrage.

En rassemblant des rappels de cours clairs et des exercices résolus et chiffrés, j'ai cherché à offrir un outil méthodique, à même d'accompagner les étudiants tout au long de leur parcours académique. Des sections de BTS aux étudiants en Licence et en Master, en passant par les écoles d'ingénieurs, j'ai eu à cœur de fournir un support pédagogique polyvalent. De plus, cet ouvrage pourra également se révéler précieux pour ceux se préparant aux concours du CAPET et de l'Agrégation.

La mécanique des structures a jalonné l'ensemble de mon parcours académique. J'ai puisé dans cette discipline une source d'inspiration constante et j'ai souhaité, à travers ce livre, partager cette passion et offrir aux lecteurs un compagnon de route dans leur quête de connaissances.

J'espère sincèrement que cet ouvrage saura répondre aux attentes des étudiants et des enseignants, et qu'il contribuera à nourrir leur réussite académique. Que ce livre puisse être un guide sûr, un repère dans le dédale des concepts et des problématiques de la mécanique, et qu'il soit un maillon essentiel dans la chaîne de votre succès.

José OUIN

Table des matières

Préliminaires : Notations utilisées et conventions de signe

1- Notations utilisées	11
2- Conventions de signe	12

Première partie : Prérequis essentiels

1- Caractéristiques géométriques d'une section.....	17
1-1. Moment statique – Centre de gravité	17
1-1.1 Expression du moment statique	17
1-1.2 Expression du centre de gravité.....	17
1-1.3 Exemples.....	18
1-2. Moment quadratique	23
1-2.1 Expression du moment quadratique.....	23
1-2.2 Théorème de Huygens.....	24
1-2.3 Exemples.....	24
2- Modélisation des liaisons	29
2-1. Hypothèses	29
2-2. Définition des liaisons élémentaires	29
3- Modélisation des actions mécaniques.....	30
3-1. Actions mécaniques sur un solide.....	30
3-1.1 Notion de force	30
3-1.2 Système de forces.....	31
3-1.3 Actions mécaniques à distance.....	33
3-1.4 Actions mécaniques de contact.....	34
3-2. Actions mécaniques dans les liaisons entre solides	35
3-2.1 Torseur mécanique de liaison	35
3-3. Principe des actions mutuelles.....	38
4- Isolement d'un système de solides	39
5- Statique	41
5-1. Principe fondamental de la statique.....	41
5-1.1 Théorème de la résultante	41
5-1.2 Théorème du moment résultant	41
5-2. Résolution d'un problème de statique	42
5-2.1 Méthode de détermination de l'isostaticité ou de l'hyperstaticité d'un système.....	43
5-2.2 Algorithme de résolution.....	45
5-2.3 Méthode analytique de résolution	45

6- Mécanique des structures	46
6-1. Objectifs et hypothèses de la mécanique des structures	46
6-1.1 Objectifs	46
6-1.2 Hypothèses	46
6-2. Etude d'une poutre.....	46
6-2.1 Définition de la poutre	46
6-2.2 Sollicitations internes	47
6-3. Identification de la nature des sollicitations	52
6-4. Etude des sollicitations simples ou composées.....	53
6-4.1 Exploitation et interprétation d'un essai de traction.....	53
6-4.2 Traction simple – Compression simple sans flambement.....	54
6-4.3 Flexion simple	56

Deuxième partie : Calculs des déplacements d'une structure

Formules générales de Bresse

1- Formules générales de Bresse	71
1-1. Définition.....	71
1-2. Enoncé des formules générales de Bresse	71

Applications

Etude d'une poutre encastree	75
Etude d'un portique de bâtiment.....	77
Etude d'un anneau dynamométrique.....	80
Etude de la structure d'un hall de gare	86
Approche intuitive de la résolution d'un système hyperstatique	92

Troisième partie : Résolution de systèmes hyperstatiques

Poutres continues – Théorème des trois moments

1- Théorème des trois moments.....	99
1-1. Définition.....	99
1-2. Enoncé du théorème des trois moments.....	99
1-3. Relation entre les sollicitations internes et les moments sur appuis	101
1-4. Formulaire des rotations	102

Applications

Etude d'une panne reposant sur trois fermes	105
Etude d'une poutre encastrée à une extrémité.....	113
Etude d'une poutre reposant sur quatre appuis.....	120
Etude d'une poutre encastrée à une extrémité et reposant sur trois appuis.....	130
Etude d'une poutre encastrée avec appui élastique	142

Quatrième partie : Résolution de systèmes hyperstatiques Méthode des forces – Principe des travaux virtuels

1- Méthode des forces.....	149
1-1. Méthode générale de résolution d'un système hyperstatique.....	149
1-1.1 Présentation de la méthode générale	149
1-1.2 Exemple de résolution.....	150
1-2. Enoncé du principe des travaux virtuels	151
1-2.1 Présentation	151
1-2.2 Enoncé du principe des travaux virtuels.....	151
1-2.3 Théorème de la charge unité	152
1-2.4 Méthode graphique de calcul du travail de déformation.....	152
1-2.5 Intégrales de Mohr	154

Applications

Etude d'une poutre encastrée	161
Etude d'un portique de bâtiment articulé en pied	165
Etude de l'influence de la température sur un système hyperstatique.....	173
Etude d'une poutre encastrée avec appui élastique	178
Etude d'une grue de manutention.....	183
Etude d'un abri à bicyclettes	195
Etude d'une poutre continue	204
Etude d'un portique de bâtiment encastré en pied	210

Cinquième partie : Résolution de systèmes hyperstatiques

Méthode des déplacements – Matrice de rigidité d'une structure

1- Méthode des déplacements	223
1-1. Présentation générale	223
1-1.1 Présentation de la méthode des déplacements	223
1-1.2 Principe de la méthode des déplacements	223
1-2. Relations entre les actions des nœuds et les déplacements	224
1-2.1 Description	224
1-2.2 Formulaire des réactions de liaisons.....	227
1-2.3 Hypothèse simplificatrice	229
1-3. Equations d'équilibre des nœuds	230
1-3.1 Description de la methode	230
1-3.2 Exemples d'équations d'équilibre.....	230
1-3.3 Cas particuliers	232
1-4. Méthode graphique de détermination des degrés de liberté d'une structure	234
1-4.1 Description de la méthode	234
1-4.2 Exemple 1	234
1-4.3 Exemple 2	235
1-4.4 Exemple 3	236
1-4.5 Exemple 4	236
1-5. Relations entre les sollicitations internes et les actions des nœuds sur les extrémités des barres	237
1-6. Organigramme de la méthode des déplacements	238

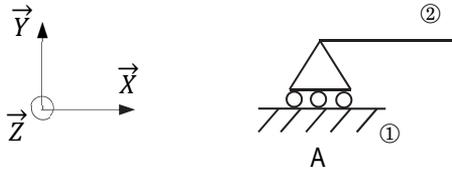
Applications

Etude de la structure d'un abri	241
Etude d'une grue de manutention	250
Etude d'une poutre continue	259
Etude d'un portique de bâtiment encastré en pied	266
Etude de la structure d'un entrepôt	278

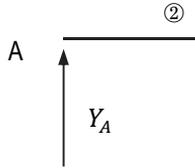
1

Première partie

Prérequis essentiels



La liaison interdit la translation selon \vec{Y} . Le solide ① exerce donc une force de direction \vec{Y} sur le solide ② par l'intermédiaire de la liaison appui simple.

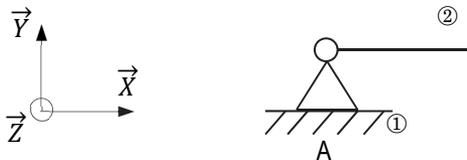


Le torseur mécanique de liaison est le torseur des actions du solide ① sur le solide ②, son expression est la suivante :

$$\{T_{\text{Mécanique de liaison}}\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A$$

• Liaison articulation

On étudie un solide ① lié au solide ② par une liaison articulation au point A.



La liaison interdit la translation selon \vec{X} ainsi que la translation selon \vec{Y} . Le solide ① exerce donc une force de direction \vec{X} et une force de direction \vec{Y} sur le solide ② par l'intermédiaire de la liaison articulation.

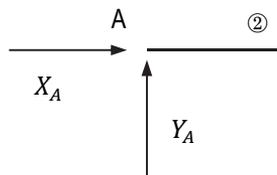
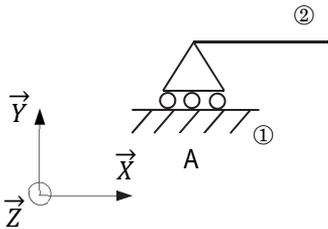
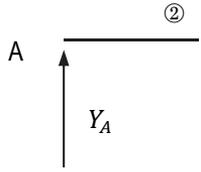
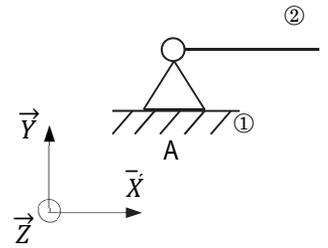
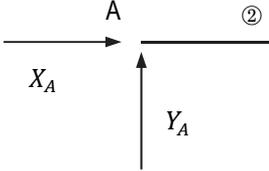
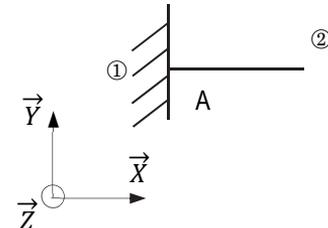
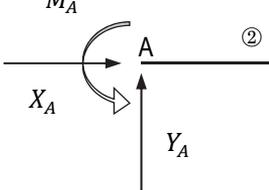


Tableau récapitulatif des torseurs mécaniques de liaison pour les trois liaisons élémentaires :

Types de liaison et modélisations	Torseurs mécaniques de liaison	Schémas
<p>APPUI SIMPLE</p> 	$\{T_{\text{Mécanique de liaison}}\}_A = \left\{ \begin{array}{c c} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A$	
<p>ARTICULATION</p> 	$\{T_{\text{Mécanique de liaison}}\}_A = \left\{ \begin{array}{c c} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A$	
<p>ENCASTREMENT</p> 	$\{T_{\text{Mécanique de liaison}}\}_A = \left\{ \begin{array}{c c} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & M_A \end{array} \right\}_A$	

3-3. Principe des actions mutuelles

A l'équilibre, le torseur des actions du solide ① sur le solide ② est égale à l'opposé du torseur des actions du solide ② sur le solide ①.

$$\{T_{\text{Actions de 1 sur 2}}\}_A + \{T_{\text{Actions de 2 sur 1}}\}_A = \vec{0}$$

4- Isolement d'un système de solides

Il s'applique deux types d'actions sur un système de solides isolé, les actions dites intérieures et les actions dites extérieures.

↳ Actions intérieures :

Les actions intérieures au système de solides isolé sont constituées par les actions dans les liaisons entre les solides. Le système de solides isolé comporte une infinité de solides (une barre est constituée d'un ensemble infini de points liés entre eux par des liaisons encastrement).

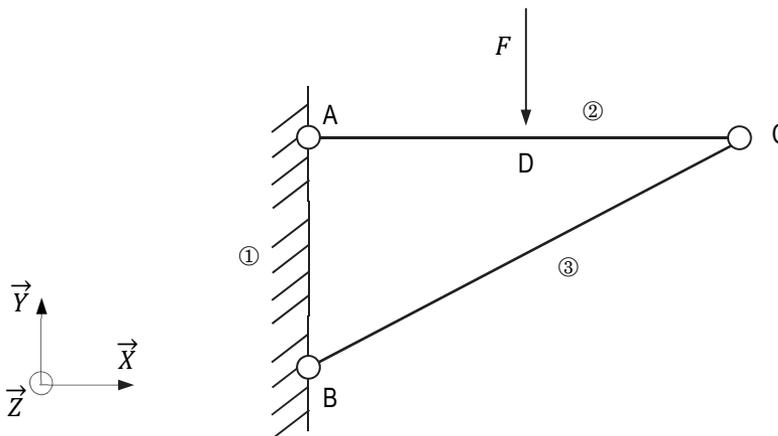
↳ Actions extérieures :

Les actions extérieures au système de solides isolé sont constituées par les actions suivantes :

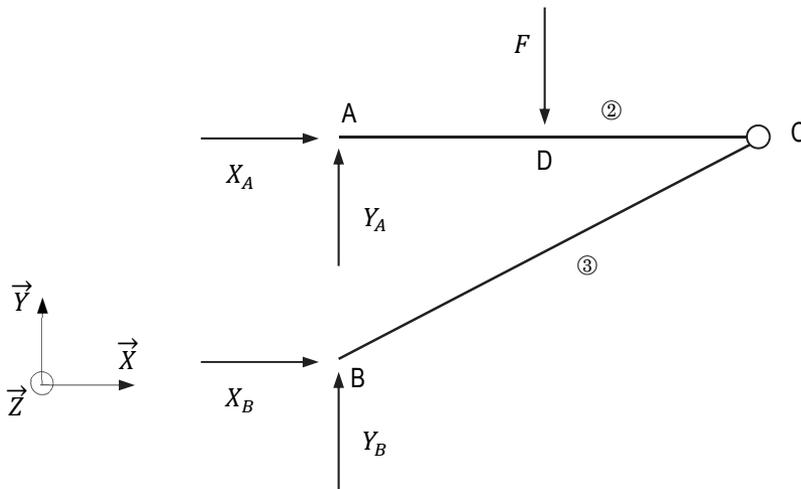
- les actions mécaniques à distance ;
- les actions mécaniques de contact ;
- les actions mécaniques des autres solides sur le système de solides isolé.

Exemple :

La figure ci-dessous représente une partie de la structure d'un abri à bicyclettes.



On isole le système de solides ② + ③ puis on énumère les actions intérieures et extérieures. La figure ci-après représente le système de solides isolé.



Le torseur mécanique de liaison de ③ sur ② représente une des actions intérieures au système ② + ③ :

$$\{T_{\text{Mécanique de liaison}}\}_C = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\}_C$$

De manière générale, quel que soit le point G appartenant à la barre ② ou à la barre ③, le torseur mécanique de liaison de la partie de la structure à droite du point G sur la partie à gauche du point G représente une action intérieure au système de solides ② + ③. Ce torseur est appelé torseur de cohésion.

Les actions extérieures au système ② + ③ sont caractérisées par les torseurs suivants :

$$\{T_{\text{Mécanique de liaison}}\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\}_A$$

$$\{T_{\text{Mécanique de liaison}}\}_B = \left\{ \begin{array}{c|c} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\}_B$$

$$\{T_{\text{Action F}}\}_D = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\}_D$$

5-2.1 Méthode de détermination de l'isostaticité ou de l'hyperstaticité d'un système

Pour déterminer l'isostaticité ou l'hyperstaticité d'un système de solides, il suffit de suivre les trois étapes suivantes :

1/ On isole le système de solides et on comptabilise le nombre de solides n . On dispose alors de $3 \cdot n$ équations de la statique.

2/ On calcule le nombre d'inconnues de liaison : i

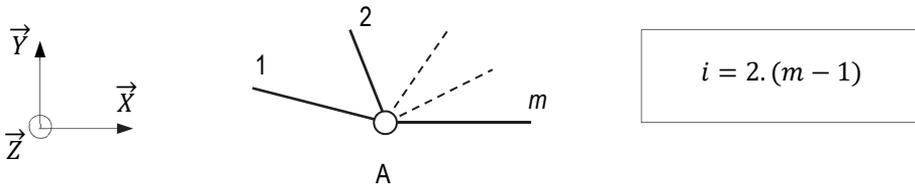
3/ On compare les valeurs i et $3 \cdot n$:

- si $i < 3 \cdot n$: le système est hypostatique ;
- si $i = 3 \cdot n$: le système est isostatique et les équations de la statique sont suffisantes pour déterminer les inconnues de liaison ;
- si $i > 3 \cdot n$: le système est hyperstatique d'ordre $(i - 3 \cdot n)$ et il faudra établir $(i - 3 \cdot n)$ équations supplémentaires pour pouvoir déterminer les inconnues de liaison.

• Détermination du nombre d'inconnues de liaison

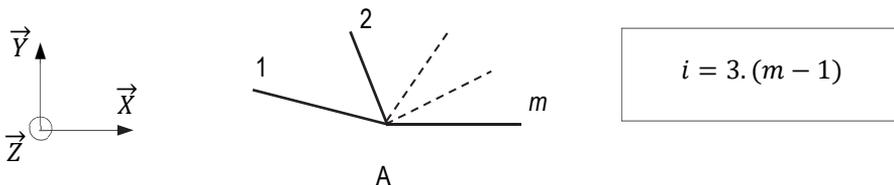
✓ Liaison articulation

La figure ci-dessous représente m solides liés entre eux par une liaison articulation au point A. Le nombre d'inconnues de liaison en ce point a l'expression suivante :



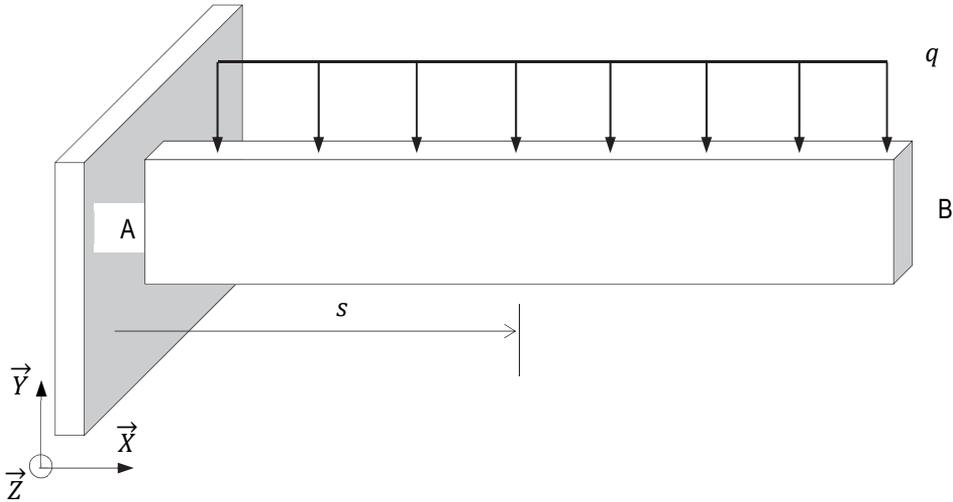
✓ Liaison encastrement

La figure ci-dessous représente m solides liés entre eux par une liaison encastrement au point A. Le nombre d'inconnues de liaison en ce point a l'expression suivante :

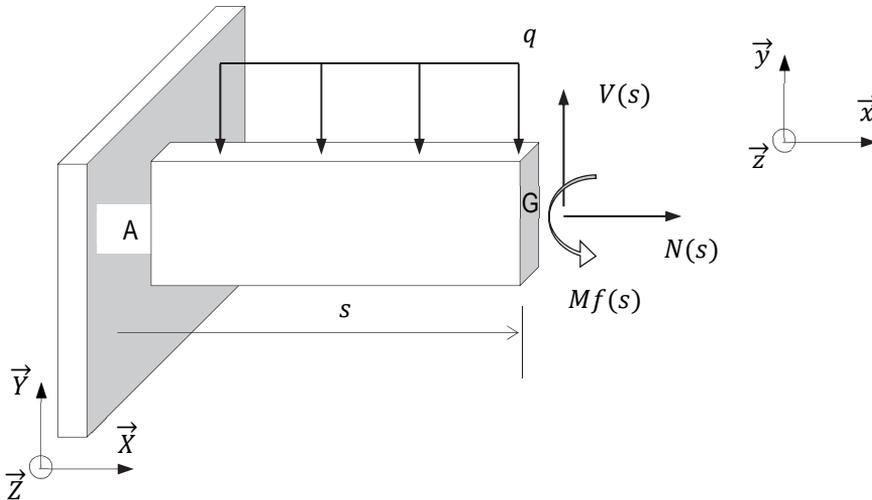


Le tableau ci-dessous donne quelques exemples de détermination d'isostaticité ou de l'hyperstaticité d'une structure :

Modélisations des structures	Nombre total d'équations de la statique	Nombre total d'inconnues de liaison
	$3.n = 3$	$i = 2 + 1 = 3$
La structure est isostatique		
	$3.n = 3$	$i = 1 + 1 = 2$
La structure est hypostatique		
	$3.n = 3$	$i = 3$
La structure est isostatique		
	$3.n = 3$	$i = 3 + 1 = 4$
La structure est hyperstatique d'ordre 1		
	$3.n = 6$	$i = 2 + 2 + 2 = 6$
La structure est isostatique		
	$3.n = 21$	$i = 2 + 2 + 4 + 6 + 4 + 2 + 1 = 21$
La structure est isostatique		
	$3.n = 6$	$i = 3 + 2 + 1 = 6$
La structure est isostatique		



On isole une partie de la poutre droite en effectuant une coupure à l'abscisse s :



Le torseur des actions de la partie de droite sur la partie de gauche à l'abscisse s est appelé torseur des efforts de cohésion. Ce torseur est défini dans le repère local lié à la barre et son expression est la suivante :

$$\{T_{\text{Efforts de cohésion}}\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} N(s) & 0 \\ V(s) & 0 \\ \hline 0 & Mf(s) \end{array} \right\}_G$$

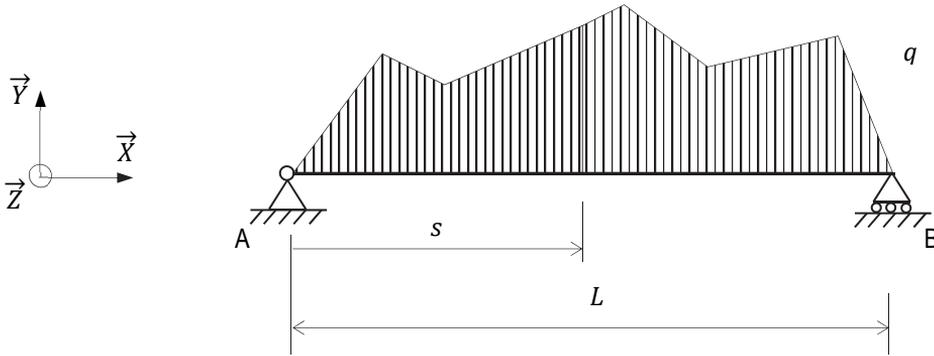
Les sollicitations internes à l'abscisse s sont égales aux composantes du torseur des efforts de cohésion à cette abscisse.

On rappelle les définitions suivantes :

- $N(s)$: effort normal à l'abscisse s en N ;
- $V(s)$: effort tranchant à l'abscisse s en N ;
- $Mf(s)$: moment fléchissant à l'abscisse s en N. m.

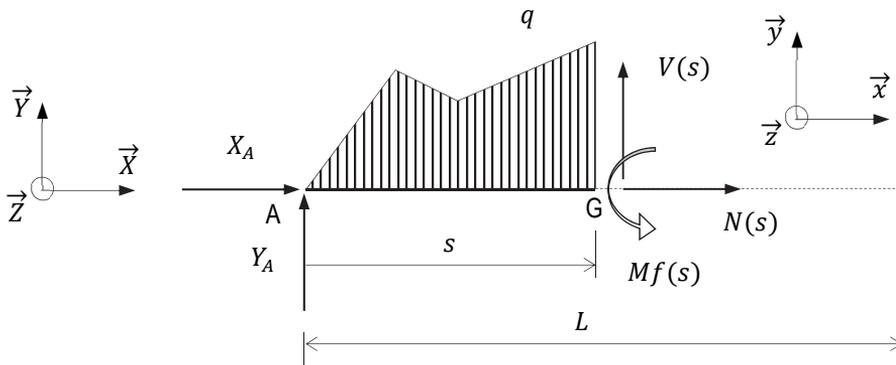
• Détermination des sollicitations internes

La figure ci-dessous représente une poutre de longueur L reposant sur deux appuis A et B. Cette poutre est soumise à des actions extérieures notées q .



✓ Isolement de la partie gauche de la poutre

On isole une partie de poutre de longueur s située à gauche de la coupure et l'on place en G les efforts de la partie de droite sur la partie isolée :



On applique le principe fondamental de la statique afin de déterminer les expressions des sollicitations internes. On obtient les trois équations suivantes :

$$N(s) + \sum_{\text{en projection sur } \vec{x}} [\text{efforts à gauche de la coupure}] = 0$$

$$V(s) + \sum_{\text{en projection sur } \vec{y}} [\text{efforts à gauche de la coupure}] = 0$$

$$Mf(s) + \sum_{\text{en projection sur } \vec{z}} [\text{moments par rapport à G des efforts à gauche de la coupure}] = 0$$

On en déduit les résultats suivants :

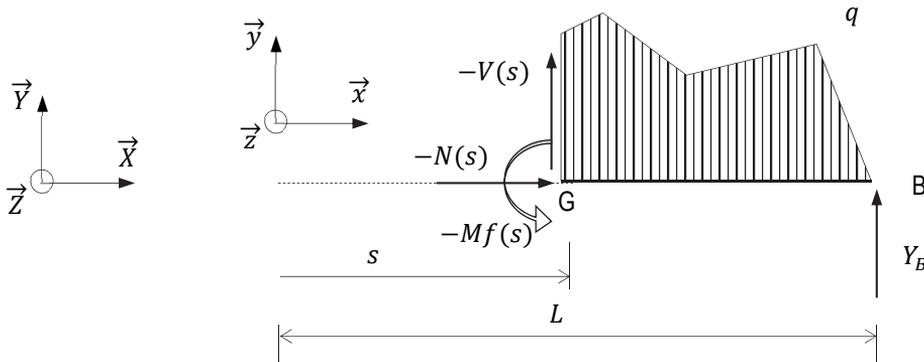
$$N(s) = - \sum_{\text{en projection sur } \vec{x}} [\text{efforts à gauche de la coupure}]$$

$$V(s) = - \sum_{\text{en projection sur } \vec{y}} [\text{efforts à gauche de la coupure}]$$

$$Mf(s) = - \sum_{\text{en projection sur } \vec{z}} [\text{moments par rapport à G des efforts à gauche de la coupure}]$$

✓ **Isolement de la partie droite de la poutre**

On isole une partie de poutre de longueur $(L - s)$ située à droite de la coupure et l'on place en G les efforts de la partie de gauche sur la partie isolée :



Le principe des actions mutuelles permet de dire que les efforts de la partie de gauche sur la partie de droite sont opposés aux efforts de la partie de droite sur la partie de gauche.

On applique le principe fondamental de la statique afin de déterminer les expressions des sollicitations internes. On obtient les trois équations suivantes :

$$-N(s) + \sum_{\text{en projection sur } \vec{x}} [\text{efforts à droite de la coupure}] = 0$$

$$-V(s) + \sum_{\text{en projection sur } \vec{y}} [\text{efforts à droite de la coupure}] = 0$$

$$-Mf(s) + \sum_{\text{en projection sur } \vec{z}} [\text{moments par rapport à G des efforts à droite de la coupure}] = 0$$

On en déduit les résultats suivants :

$$N(s) = + \sum_{\text{en projection sur } \vec{x}} [\text{efforts à droite de la coupure}]$$

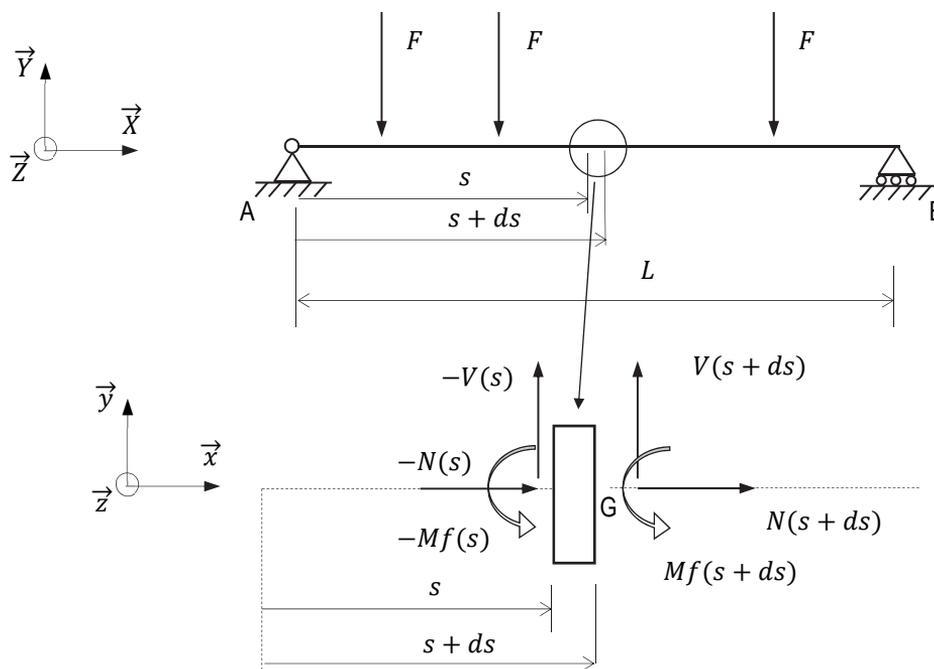
$$V(s) = + \sum_{\text{en projection sur } \vec{y}} [\text{efforts à droite de la coupure}]$$

$$Mf(s) = + \sum_{\text{en projection sur } \vec{z}} [\text{moments par rapport à G des efforts à droite de la coupure}]$$

• Relation entre le moment fléchissant et l'effort tranchant

La figure ci-dessous représente une poutre de longueur L reposant sur deux appuis A et B. Cette poutre est soumise à des actions extérieures notées F .

On isole un élément de poutre compris entre les abscisses s et $s + ds$



On écrit l'équation d'équilibre relative à la somme des moments des forces extérieures par rapport au point G :

$$Mf(s + ds) - Mf(s) - [-V(s) \cdot ds] = 0$$

$$-V(s) = \frac{Mf(s + ds) - Mf(s)}{ds} = \frac{dMf(s)}{ds}$$

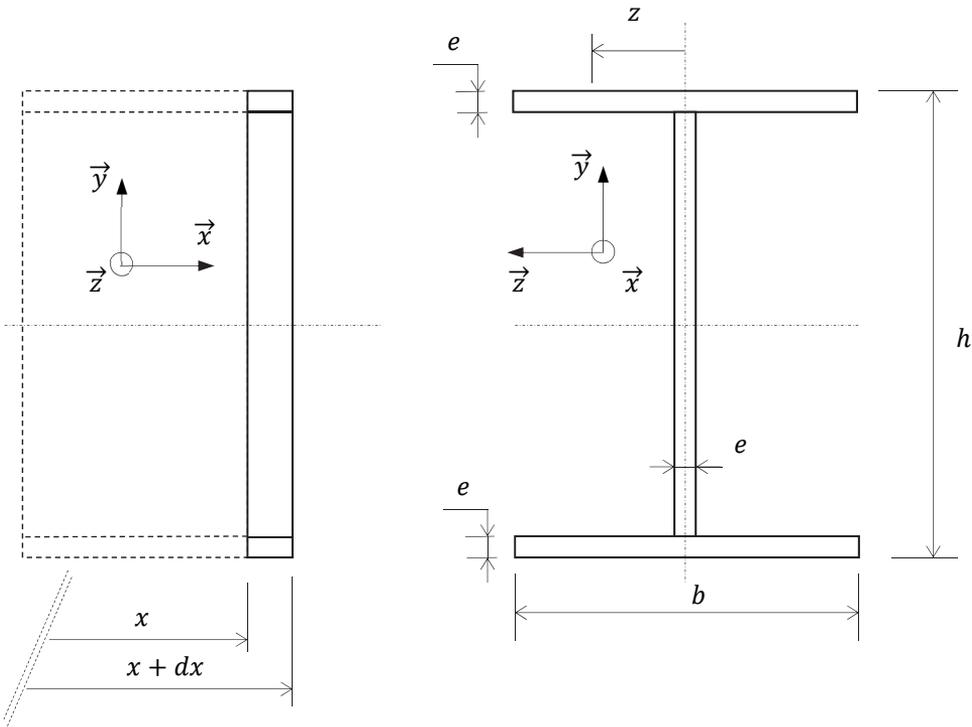
$$\frac{d}{ds}(Mf(s)) = -V(s)$$

A l'abscisse s , la dérivée du moment fléchissant est égale à l'opposé de l'effort tranchant.

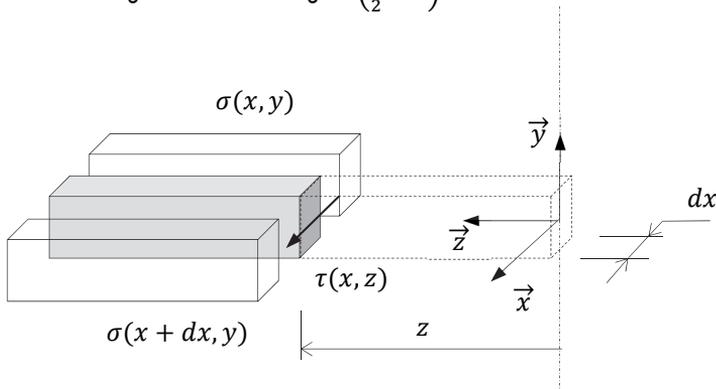
6-3. Identification de la nature des sollicitations

La nature des sollicitations dépend des composantes non nulles du torseur des efforts de cohésion. Le tableau ci-dessous recense les différents types de sollicitation :

Nature des sollicitations	Torseur des efforts de cohésion
Torsion pure	$\{T_{\text{Efforts de cohésion}}\}_G = \left\{ \begin{array}{l l} N(s) = 0 & Mt(s) \neq 0 \\ V(s) = 0 & 0 \\ 0 & Mf(s) = 0 \end{array} \right\}_G$
Cas des structures planes chargées dans leur plan	
Traction – Compression	$\{T_{\text{Efforts de cohésion}}\}_G = \left\{ \begin{array}{l l} N(s) \neq 0 & 0 \\ V(s) = 0 & 0 \\ 0 & Mf(s) = 0 \end{array} \right\}_G$
Flexion pure	$\{T_{\text{Efforts de cohésion}}\}_G = \left\{ \begin{array}{l l} N(s) = 0 & 0 \\ V(s) = 0 & 0 \\ 0 & Mf(s) \neq 0 \end{array} \right\}_G$
Flexion simple	$\{T_{\text{Efforts de cohésion}}\}_G = \left\{ \begin{array}{l l} N(s) = 0 & 0 \\ V(s) \neq 0 & 0 \\ 0 & Mf(s) \neq 0 \end{array} \right\}_G$
Flexion composée	$\{T_{\text{Efforts de cohésion}}\}_G = \left\{ \begin{array}{l l} N(s) \neq 0 & 0 \\ V(s) \neq 0 & 0 \\ 0 & Mf(s) \neq 0 \end{array} \right\}_G$



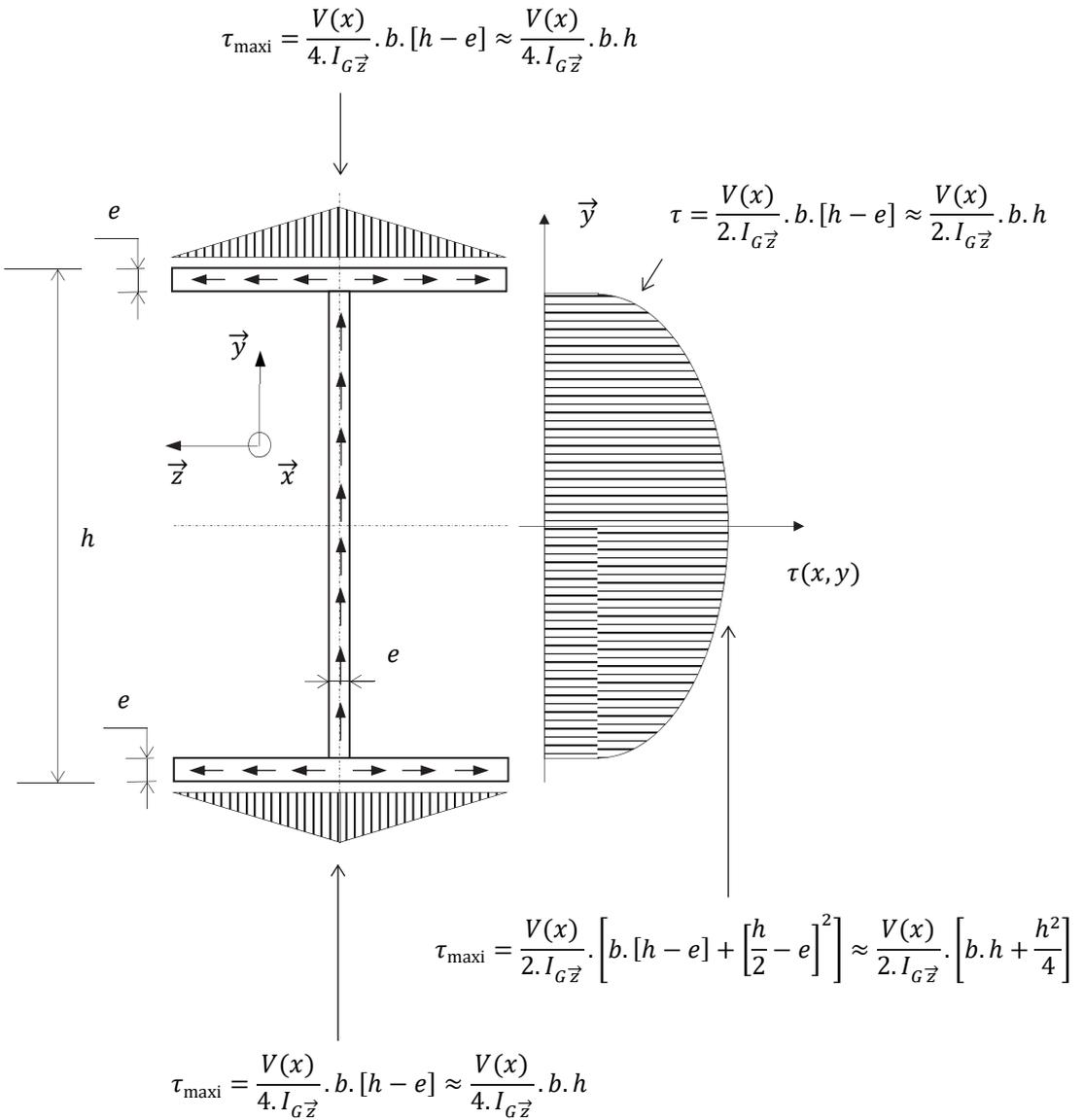
On commence par déterminer l'expression de la contrainte tangente longitudinale dans l'aile. On isole un petit élément volumique d'aile de longueur dx et de largeur $\left(\frac{b}{2} - z\right)$:



A l'équilibre, la somme des forces exercées sur cet élément est égale à zéro. En projection sur \vec{x} , on obtient l'équation suivante :

$$\tau(x, z) \cdot e \cdot dx + \int_{h/2-e}^{h/2} \sigma(x + dx, y) \cdot \left[\frac{b}{2} - z\right] \cdot dy - \int_{h/2-e}^{h/2} \sigma(x, y) \cdot \left[\frac{b}{2} - z\right] \cdot dy = 0$$

La figure ci-dessous représente l'évolution des contraintes tangentes transversales dans les ailes et dans l'âme :



Deuxième Partie

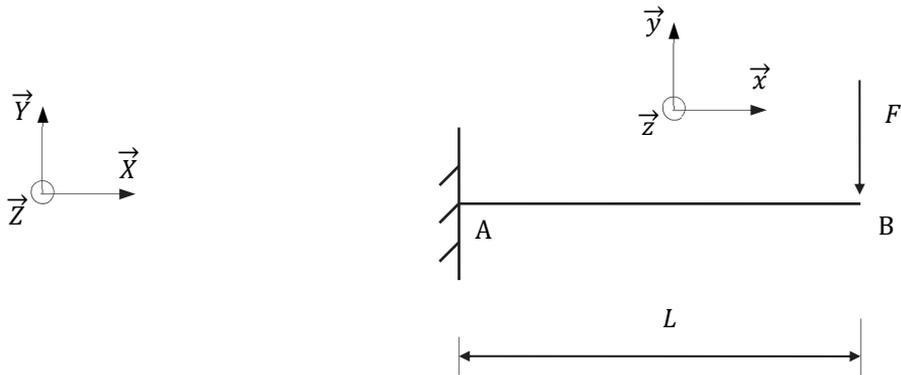
2

**Calcul des déplacements
d'une structure**

**Formules générales de
Bresse**

Etude d'une poutre encadrée

Une poutre de longueur L , encadrée en A est soumise à une charge concentrée F au point B. On note I_z le moment quadratique de la section transversale et E le module d'élasticité longitudinale du matériau constituant la poutre.



Travail demandé

- Déterminer l'expression de la translation verticale du point B : v_B
- Déterminer l'expression de la rotation de la section au point B : ω_B

Application numérique :

On donne : $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa ; $I_z = 171$ cm⁴ ; $F = 300$ daN ; $L = 2$ m

Solution

- Expression de la translation verticale du point B : v_B

L'effort normal est égal à zéro dans cet exemple, la formule se simplifie donc ainsi :

$$\vec{\Delta}_B = \vec{\Delta}_A + \vec{\omega}_A \wedge \overrightarrow{G_A G_B} + \int_{s_A}^{s_B} \frac{Mf(s)}{EI_z} \vec{z} \wedge \overrightarrow{G G_B} ds$$

L'équation du moment fléchissant dans la poutre AB est la suivante :

$$Mf(s) = -(L - s)F$$

La rotation ω_A est égale à zéro en A (liaison encastrement) et le produit vectoriel donne :

$$\vec{z} \wedge \overrightarrow{G G_B} = \begin{vmatrix} 0 & (L - s) \\ 0 \wedge & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ (L - s) & 0 \end{vmatrix}$$

3

Troisième partie

**Résolution de systèmes
hyperstatiques**

**Poutres continues
Théorème des trois moments**

Poutres continues

Théorème des trois moments

1- Théorème des trois moments

1-1. Définition

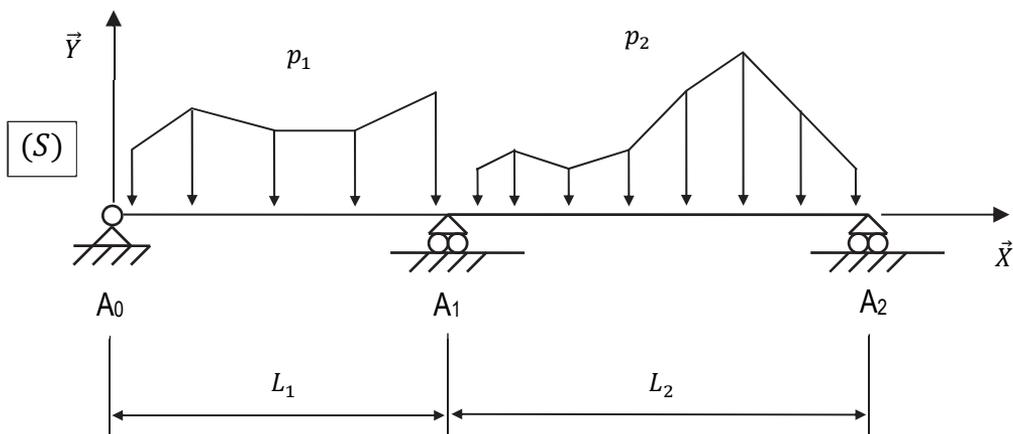
Le théorème des trois moments est une méthode utilisée en mécanique des structures pour analyser le comportement des poutres continues soumises à des charges. Plus précisément, il permet de déterminer les réactions d'appui et les moments fléchissants le long d'une poutre continue ayant deux travées ou plus.

Il s'agit d'une méthode de résolution des systèmes hyperstatiques qui s'applique donc aux poutres continues. Le théorème des trois moments permet de déterminer les moments sur appuis. Ces moments sont les inconnues hyperstatiques du système.

La connaissance de ces moments sur appuis permet ensuite de déterminer les sollicitations internes dans la structure hyperstatique.

1-2. Enoncé du théorème des trois moments

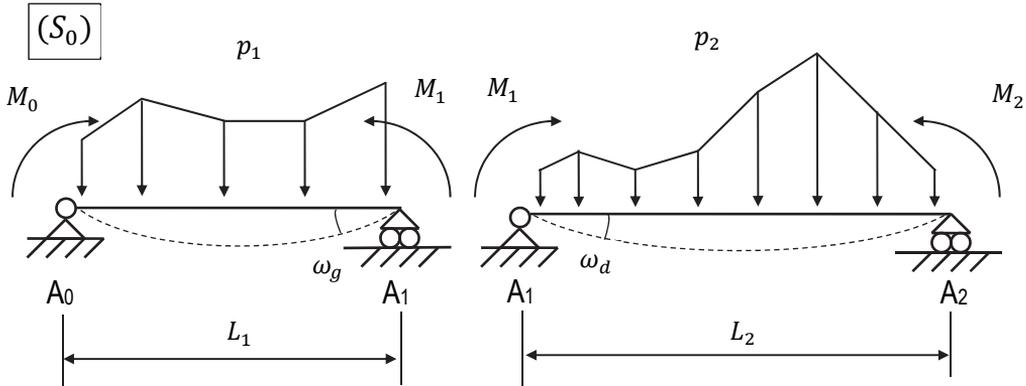
On considère une poutre continue sur trois appuis A_0 , A_1 et A_2 que l'on appelle le système (S) . Les distances entre appuis valent respectivement L_1 et L_2 . La partie de poutre de longueur L_1 reçoit une charge p_1 et celle de longueur L_2 une charge p_2 . Les charges p_1 et p_2 peuvent être la somme de charges réparties, de charges ou de couples concentrés.



Ce système (S) est hyperstatique d'ordre 1, il faut donc établir une équation supplémentaire pour pouvoir déterminer les expressions des sollicitations internes dans la structure.

Le théorème des trois moments propose d'étudier un système (S_0) isostatique auquel on ajoutera une condition cinématique.

Le système (S_0) se présente sous la forme des deux poutres isostatiques chargées de la manière suivante :



Le système (S_0) est équivalent au système (S) à condition que les moments sur appuis M_0 , M_1 et M_2 respectent la condition suivante :

$$L_1 M_0 + 2M_1(L_1 + L_2) + L_2 M_2 = 6EI_z(\omega_d - \omega_g)$$

où les rotations ont les expressions suivantes :

$$\omega_d = \frac{1}{EI_z} \int_0^{L_2} m f_2(x) \left(\frac{x}{L_2} - 1 \right) dx$$

$$\omega_g = \frac{1}{EI_z} \int_0^{L_1} m f_1(x) \left(\frac{x}{L_1} \right) dx$$

Notations

$m f_1(x)$ représente le moment fléchissant dû au chargement p_1 dans la poutre isostatique A_0A_1 de longueur L_1 ; de même $m f_2(x)$ est le moment fléchissant dû au chargement p_2 dans la poutre isostatique A_1A_2 de longueur L_2 .

E est le module d'élasticité longitudinale du matériau constituant la poutre et I_z le moment quadratique de la section transversale.

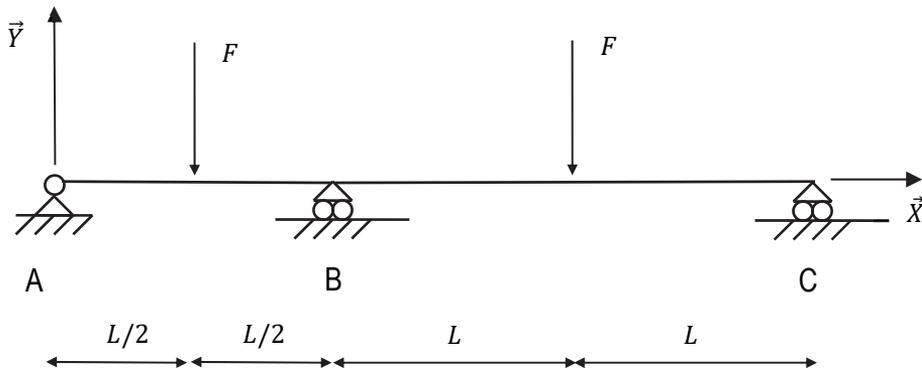
ω_d représente la rotation de la section, en A_1 , de la poutre isostatique A_1A_2 soumise au chargement p_2 .

ω_g représente la rotation de la section, en A_1 , de la poutre isostatique A_0A_1 soumise au chargement p_1 .

La connaissance de ces moments sur appuis permet de déterminer les sollicitations internes dans la poutre hyperstatique du système (S).

Etude d'une panne reposant sur trois fermes

Une panne reposant sur trois fermes peut être modélisée comme l'indique la figure ci-dessous. La poutre est de section constante, de moment quadratique I_z et elle est constituée d'un matériau de module d'élasticité longitudinale E .



Travail demandé

En appliquant le théorème des trois moments :

- 1) Déterminer les expressions des sollicitations internes dans la poutre ABC.
- 2) Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans la poutre ABC.
- 2) Déterminer les expressions des réactions de liaison aux points A, B et C.

Application numérique :

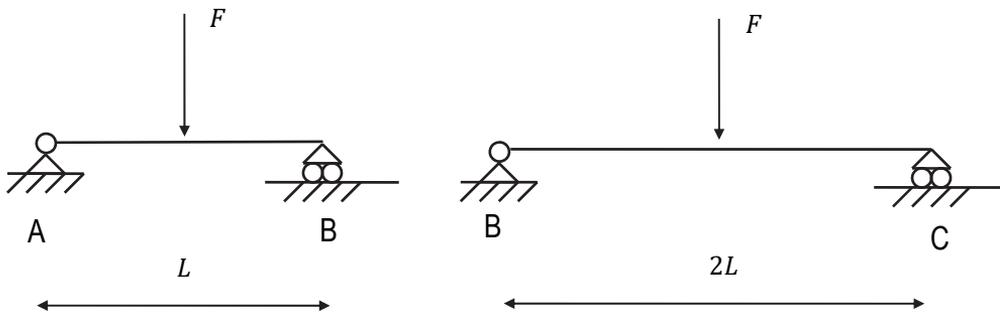
On donne : $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa ; $F = 400$ daN ; $L = 1$ m

Solution

Il s'agit d'un système hyperstatique d'ordre 1. Il faut donc établir une équation supplémentaire pour pouvoir déterminer les expressions des sollicitations internes dans la structure.

1) Expressions des sollicitations internes dans la poutre ABC

On commence par déterminer les équations du moment fléchissant $mf(x)$ et de l'effort tranchant $v(x)$ dans chaque poutre isostatique :



Poutre AB

Zones	AB : $0 \leq x \leq L/2$	AB : $L/2 \leq x \leq L$
$v_{AB}(x)$	$-\frac{F}{2}$	$+\frac{F}{2}$
$mf_{AB}(x)$	$\frac{1}{2}Fx$	$\frac{1}{2}F(L-x)$

Poutre BC

Zones	BC : $0 \leq x \leq L$	BC : $L \leq x \leq 2L$
$v_{BC}(x)$	$-\frac{F}{2}$	$+\frac{F}{2}$
$mf_{BC}(x)$	$\frac{1}{2}Fx$	$\frac{1}{2}F(2L-x)$

On applique ensuite le théorème des trois moments afin de déterminer une équation supplémentaire.

Quatrième partie

4

**Résolution de systèmes
hyperstatiques**

Méthode des forces

Principe des travaux virtuels

Méthode des forces

Principe des travaux virtuels

1- Méthode des forces

1-1. Méthode générale de résolution d'un système hyperstatique

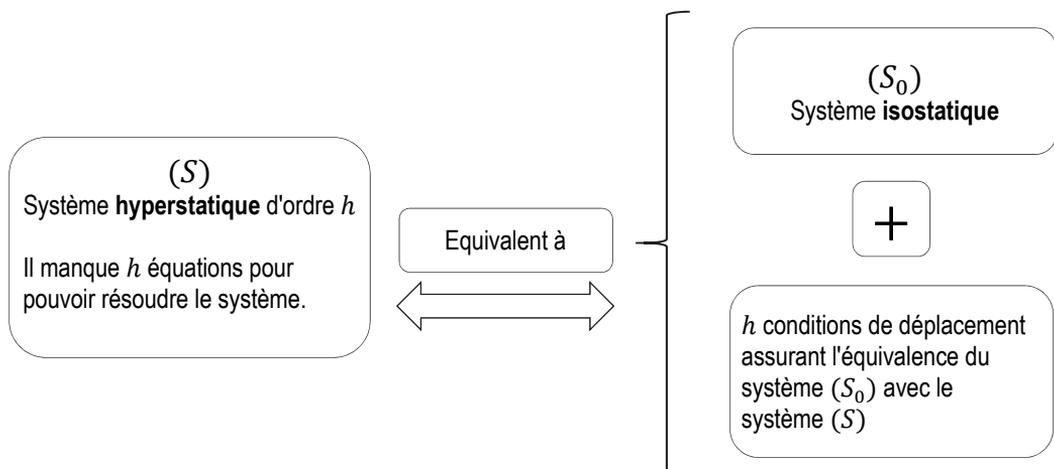
1-1.1 Présentation de la méthode générale

Un système est hyperstatique lorsque le nombre d'inconnues de liaison est supérieur au nombre d'équations issues du principe fondamental de la statique. L'écart entre ces deux nombres, noté h , correspond au degré d'hyperstaticité du système ; on dit que le système est hyperstatique d'ordre h .

Résoudre un système hyperstatique signifie déterminer toutes les inconnues de liaison afin de pouvoir calculer les sollicitations internes dans la structure étudiée.

Pour résoudre un système (S) hyperstatique d'ordre h , il faut donc établir h équations supplémentaires. La méthode consiste à choisir un système isostatique (S_0) auquel on impose h conditions de déplacement (en translation ou en rotation) afin d'obtenir un système équivalent au système (S). Ces h conditions de déplacement fournissent h équations supplémentaires.

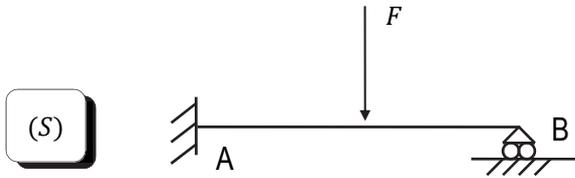
Le schéma ci-dessous représente l'équivalence entre le système (S) de départ et le système (S_0) équivalent :



Les h équations supplémentaires permettent de résoudre le système hyperstatique c'est-à-dire de déterminer toutes les inconnues de liaison afin de pouvoir calculer les sollicitations internes dans la structure étudiée.

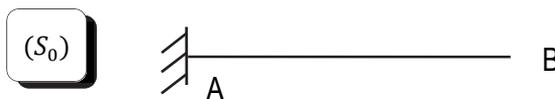
1-1.2 Exemple de résolution

On considère le système (S) hyperstatique d'ordre 1 suivant :



Il y a plusieurs choix possibles de systèmes isostatiques (S_0) , il suffit d'ajouter un degré de liberté au système (S) .

On choisit le système isostatique (S_0) suivant :

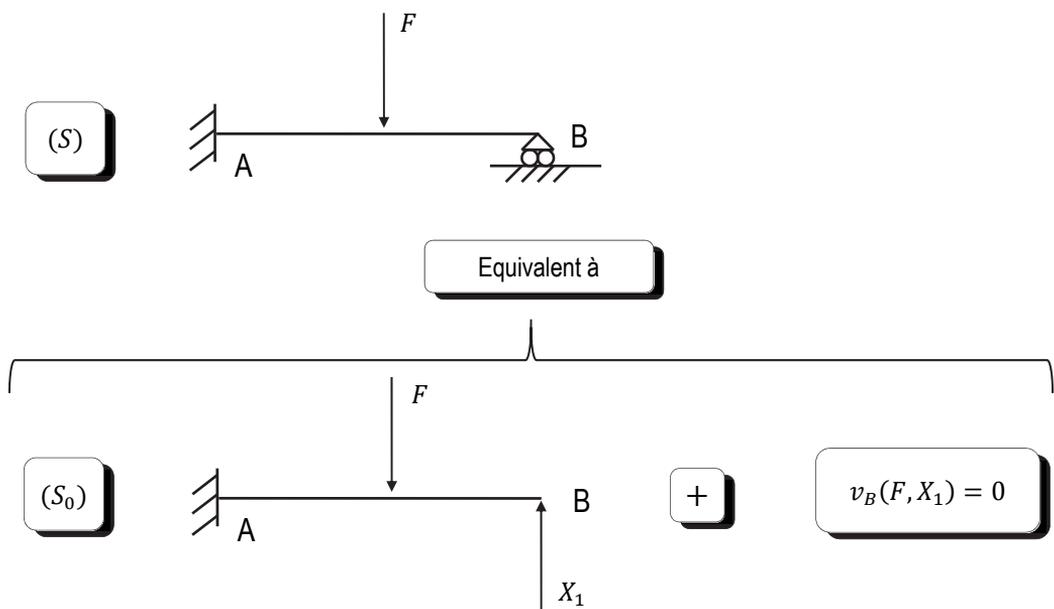


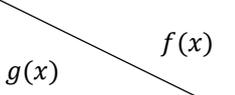
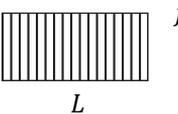
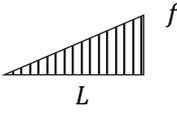
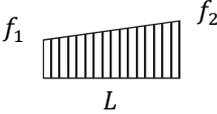
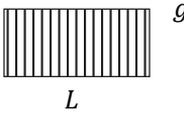
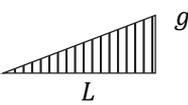
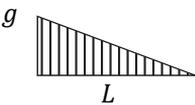
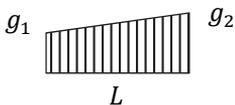
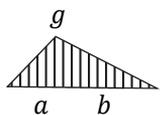
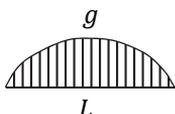
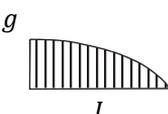
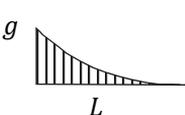
La méthode consiste à écrire que le système (S_0) ci-dessus est équivalent au système (S) à condition que la translation verticale du point B soit égale à zéro.

Il faut appliquer au système (S_0) le chargement du système (S) qui comprend :

- la charge concentrée F ;
- la réaction de liaison au point B que l'on note X_1 .

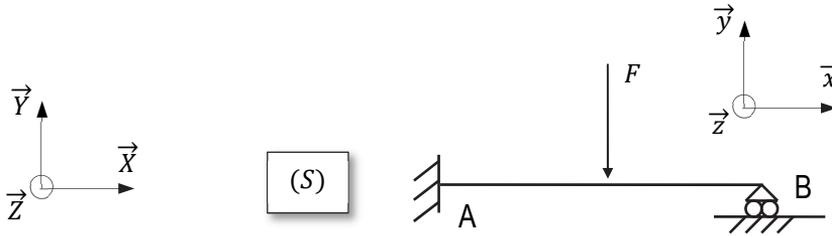
Le schéma ci-dessous représente l'équivalence entre le système (S) de départ et le système (S_0) équivalent :



Intégrales de Mohr - 1		$\int_0^L f(x) \cdot g(x) dx$	
f : extremum de la fonction $f(x)$ g : extremum de la fonction $g(x)$		$\alpha = \frac{a}{L}$ et $\beta = \frac{b}{L}$	
			
	$L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{2} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{2} L \cdot g (f_1 + f_2)$
	$\frac{1}{2} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{3} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{6} L \cdot g (f_1 + 2f_2)$
	$\frac{1}{2} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{6} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{6} L \cdot g (2f_1 + f_2)$
	$\frac{1}{2} L \cdot f \cdot (g_1 + g_2)$	$\frac{1}{6} L \cdot f \cdot (g_1 + 2g_2)$	$\frac{1}{6} L (2g_1 f_1 + g_1 f_2 + g_2 f_1 + 2g_2 f_2)$
	$\frac{1}{2} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{6} L \cdot f \cdot g (1 + \alpha)$	$\frac{1}{6} L g [f_1 (1 + \beta) + f_2 (1 + \alpha)]$
	$\frac{2}{3} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{3} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{3} L \cdot g (f_1 + f_2)$
	$\frac{2}{3} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{4} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{12} L \cdot g (5f_1 + 3f_2)$
	$\frac{1}{3} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{12} L \cdot f \cdot g$	$\frac{1}{12} L \cdot g (3f_1 + f_2)$

Etude d'une poutre encadrée

Une poutre encadrée à l'une de ses extrémités peut être schématisée comme l'indique la figure ci-dessous. La poutre est de section constante, de moment quadratique I_z et elle est constituée d'un matériau de module d'élasticité longitudinale E .



Travail demandé

- 1) Déterminer les expressions des réactions de liaison aux points A et B.
- 2) Tracer les diagrammes des sollicitations internes dans la structure AB.

Application numérique :

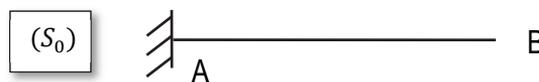
On donne : $F = 700 \text{ daN}$; $L = 3 \text{ m}$

Solution

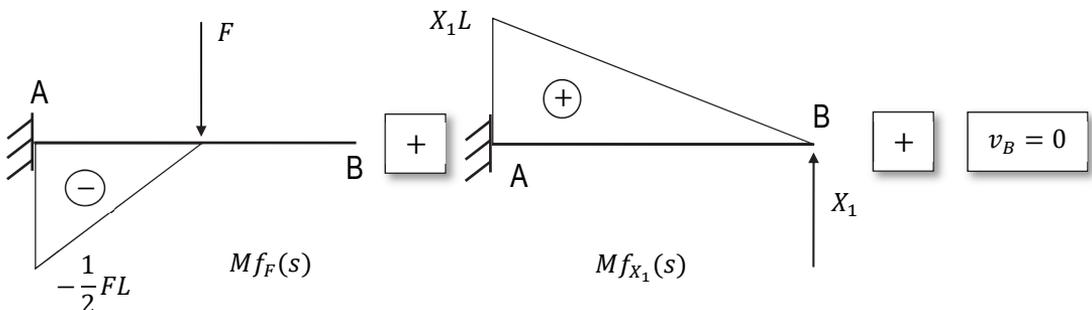
- 1) Expression des réactions de liaison aux points A et B.

Il s'agit d'un système hyperstatique d'ordre 1. Il faut donc établir une équation supplémentaire pour pouvoir déterminer les réactions de liaison ainsi que les expressions des sollicitations internes dans la structure.

On choisit le système isostatique (S_0) ci-dessous :



On applique à ce système isostatique (S_0) le chargement du système (S) ainsi que la condition de déplacement au point B. Le système (S) est équivalent à :

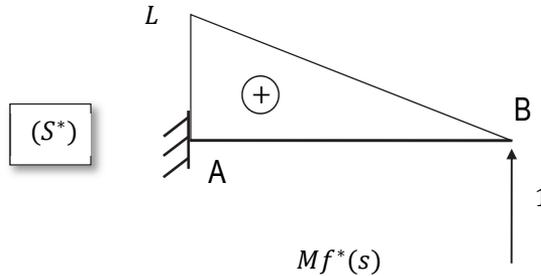


Il suffit de calculer la translation verticale v_B du point B en fonction de F et de X_1 puis d'exprimer la condition de déplacement du point B :

$$v_B = 0$$

On obtient ainsi une équation supplémentaire nécessaire à la résolution du système. Cette équation supplémentaire permettra notamment de déterminer l'expression de l'inconnue hyperstatique X_1 .

On calcule la translation verticale v_B du point B en appliquant le principe des travaux virtuels. Pour cela on utilise le système virtuel (S^*) suivant :



On applique le principe des travaux virtuels au système virtuel (S^*) dans le champ de déplacement réel du système (S).

Le travail de déformation des contraintes virtuelles dans le champ de déformation réelle est égal au travail des efforts virtuels dans le champ de déplacement réel.

$$\int_{Structure} [Mf^*(s) \cdot \chi(s) + N^*(s) \cdot \varepsilon(s)] ds = \sum_i [F_i^* \cdot u_i + \Phi_i^* \cdot \Omega_i]$$

On obtient l'égalité suivante :

$$\frac{1}{EI_z} \int_{Structure} Mf^*(s) \cdot [Mf_F(s) + Mf_{X_1}(s)] ds = 1 \cdot v_B = 0$$

$$\int_{Structure} [Mf^*(s) \cdot Mf_F(s) + Mf^*(s) \cdot Mf_{X_1}(s)] ds = 0$$

On utilise les résultats des tableaux des intégrales de Mohr pour effectuer les sommes intégrales de ces produits de moments fléchissants :

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}FL\right) \left(\frac{L}{2} + 2L\right) + \frac{1}{3}L \cdot X_1L \cdot L &= 0 \\ -\frac{5}{48}FL^3 + \frac{1}{3}X_1L^3 &= 0 \end{aligned}$$

On obtient :

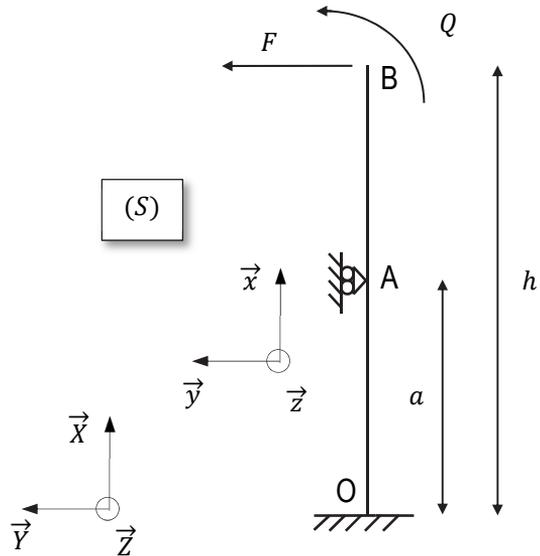
$$X_1 = \frac{5}{16}F$$

Etude d'une grue de manutention

Cette étude est tirée d'un sujet d'agrégation.

Une grue est assimilée à un mât vertical OAB, de hauteur h , d'inertie de flexion I_z constante, avec un encastrement en son pied O. On note E le module d'élasticité longitudinale du matériau constituant la structure.

Un amarrage A est assuré à la hauteur a du sol. Les actions extérieures appliquées sur la grue sont supposées concentrées au sommet B du mât, soit un couple Q et une composante horizontale F .



Travail demandé

- 1) Déterminer les expressions des réactions de liaison aux points O et A.
- 2) Déterminer l'expression de la translation du point B.
- 3) Tracer les diagrammes des sollicitations internes dans la structure OAB.

L'amarrage en A présente en fait une certaine souplesse amenant à le modéliser comme un appui simple avec, en série, un ressort de rigidité k .

- 4) Déterminer l'expression de la réaction de liaison au point A.
- 5) Déterminer l'expression de la translation du point A.
- 6) Déterminer l'expression de la translation du point B.

Application numérique :

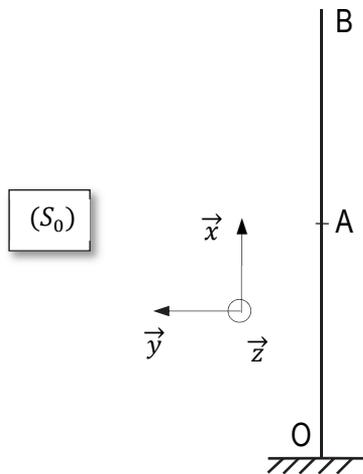
On donne : $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa ; $I_z = 0,045$ m⁴ ; $k = 10^6$ N/m ; $F = 2 \cdot 10^3$ daN ;
 $Q = 115 \cdot 10^3$ daN.m ; $a = 60$ m et $h = 110$ m.

Solution

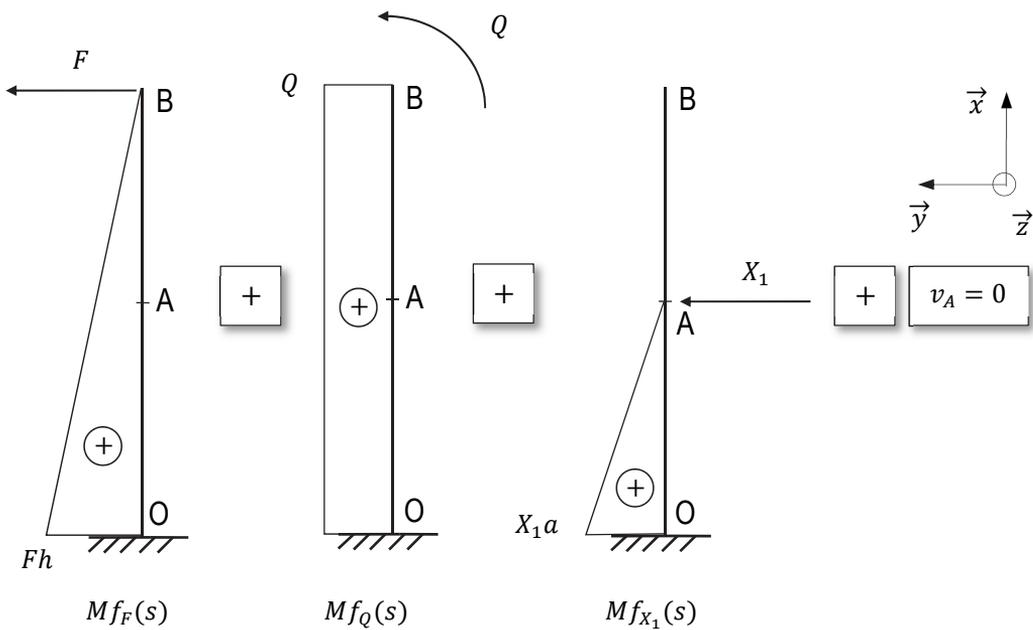
- 1) Expression des réactions de liaison aux points O et A.

Il s'agit d'un système hyperstatique d'ordre 1. Il faut donc établir une équation supplémentaire pour pouvoir déterminer les réactions de liaison ainsi que les expressions des sollicitations internes dans la structure.

On choisit le système isostatique (S_0) ci-dessous :



On applique à ce système isostatique (S_0) le chargement du système (S) ainsi que la condition de déplacement au point B. Le système (S) est équivalent à :



Il suffit de calculer la translation v_A du point A en fonction de F , Q et X_1 puis d'exprimer la condition de déplacement du point A :

$$v_A = 0$$

On obtient ainsi une équation supplémentaire nécessaire à la résolution du système. Cette équation supplémentaire permettra notamment de déterminer l'expression de l'inconnue hyperstatique X_1 .

Cinquième partie

5

Résolution de systèmes hyperstatiques

Méthode des déplacements Matrice de rigidité d'une structure

Méthode des déplacements

Matrice de rigidité d'une structure

1- Méthode des déplacements

1-1. Présentation générale

1-1.1 Présentation de la méthode des déplacements

Dans la méthode de forces, les inconnues sont soit les actions extérieures statiquement indéterminées soit les actions intérieures de liaison. D'où le nom de **méthode des forces**.

Dans la méthode des déplacements, les inconnues sont les composantes du vecteur déplacement de certains points de la structure, appelés nœuds. D'où le nom de **méthode des déplacements**.

1-1.2 Principe de la méthode des déplacements

On effectue les opérations suivantes :

- On décompose la structure en nœuds et en barres.
- On isole chaque barre et on exprime les composantes des actions des nœuds sur les extrémités de la barre en fonction des composantes de déplacement des extrémités de la barre.
- On écrit l'équilibre de chacun des nœuds sous l'action des efforts extérieurs appliqués et des actions des barres sur les nœuds. On obtient un système d'équations où les inconnues sont les composantes de déplacement des nœuds. L'écriture sous forme matricielle de ce système d'équations fait apparaître la matrice de rigidité de la structure.

$$[K] \times [D] = [F]$$

$[K]$: Matrice de rigidité de la structure

$[D]$: Matrice des déplacements

$[F]$: Matrice des efforts extérieurs

Il suffit d'inverser la matrice de rigidité pour obtenir les expressions des composantes de déplacement des nœuds. On obtient donc l'égalité suivante :

$$[D] = [K]^{-1} \times [F]$$

$[K]^{-1}$: Matrice inverse de la matrice $[K]$

- On détermine les expressions des actions des nœuds sur les extrémités des barres.
- On détermine les expressions des sollicitations internes dans la structure.

N_{AB}	$\frac{ES}{L}$	0	0	$-\frac{ES}{L}$	0	0	u_A	N_{AB}^0
V_{AB}	0	$12\frac{EI_z}{L^3}$	$6\frac{EI_z}{L^2}$	0	$-12\frac{EI_z}{L^3}$	$6\frac{EI_z}{L^2}$	v_A	V_{AB}^0
M_{AB}	0	$6\frac{EI_z}{L^2}$	$4\frac{EI_z}{L}$	0	$-6\frac{EI_z}{L^2}$	$2\frac{EI_z}{L}$	Ω_A	M_{AB}^0
N_{BA}	$-\frac{ES}{L}$	0	0	$\frac{ES}{L}$	0	0	u_B	N_{BA}^0
V_{BA}	0	$-12\frac{EI_z}{L^3}$	$-6\frac{EI_z}{L^2}$	0	$12\frac{EI_z}{L^3}$	$-6\frac{EI_z}{L^2}$	v_B	V_{BA}^0
M_{BA}	0	$6\frac{EI_z}{L^2}$	$2\frac{EI_z}{L}$	0	$-6\frac{EI_z}{L^2}$	$4\frac{EI_z}{L}$	Ω_B	M_{BA}^0

On peut écrire ces relations sous la forme d'un système d'équations, dans le repère local lié à la barre AB :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{AB} = -\frac{ES}{L}(u_B - u_A) + N_{AB}^0 \\ V_{AB} = 6\frac{EI_z}{L^2}\Omega_A + 6\frac{EI_z}{L^2}\Omega_B - 12\frac{EI_z}{L^3}(v_B - v_A) + V_{AB}^0 \\ M_{AB} = 4\frac{EI_z}{L}\Omega_A + 2\frac{EI_z}{L}\Omega_B - 6\frac{EI_z}{L^2}(v_B - v_A) + M_{AB}^0 \\ N_{BA} = \frac{ES}{L}(u_B - u_A) + N_{BA}^0 \\ V_{BA} = -6\frac{EI_z}{L^2}\Omega_A - 6\frac{EI_z}{L^2}\Omega_B + 12\frac{EI_z}{L^3}(v_B - v_A) + V_{BA}^0 \\ M_{BA} = 2\frac{EI_z}{L}\Omega_A + 4\frac{EI_z}{L}\Omega_B - 6\frac{EI_z}{L^2}(v_B - v_A) + M_{BA}^0 \end{array} \right.$$

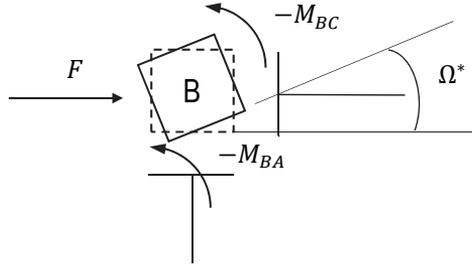
Les termes N_{AB}^0 , V_{AB}^0 , M_{AB}^0 , N_{BA}^0 , V_{BA}^0 et M_{BA}^0 représentent les actions du milieu extérieur sur la poutre AB de longueur L considérée comme bi-encastée et soumise au chargement p qui peut être la somme de charges réparties, de couples et de charges concentrées. Ces actions correspondent aux réactions de liaison aux points A et B.

Cette structure hyperstatique d'ordre 1 a deux degrés de liberté :

- Ω_B : rotation du nœud B ;
- U : translation horizontale du nœud B et du nœud C dans le repère général $(O; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

Il faut donc établir deux équations d'équilibre.

- **Equation d'équilibre relative au degré de liberté Ω_B**



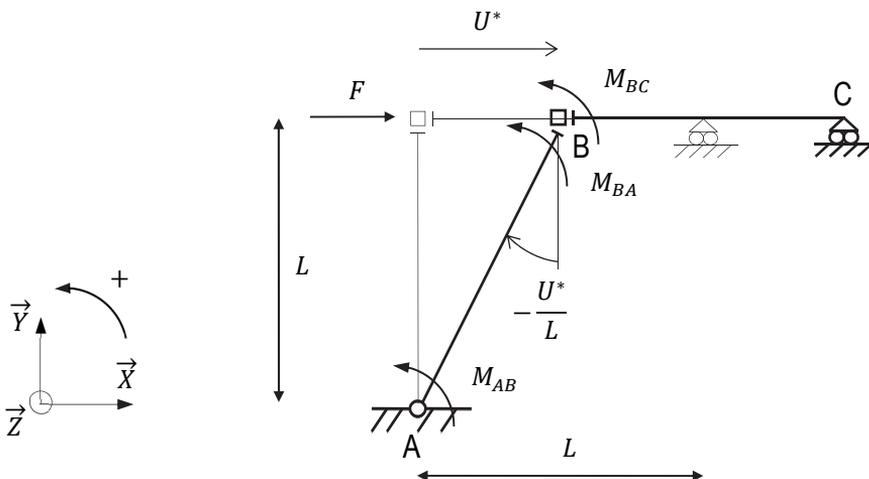
On impose une rotation virtuelle Ω^* au nœud B puis on calcule le travail virtuel W^* des efforts extérieurs appliqués au nœud B. Le travail virtuel W^* doit être égal à zéro quelle que soit la valeur de la rotation virtuelle Ω^* puisque le nœud B est en équilibre.

$$W^* = \sum_i [F_i^* \cdot u_i + \Phi_i^* \cdot \Omega_i] = [-M_{BC} - M_{BA}] \cdot \Omega^* = 0 \quad \forall \Omega^*$$

On obtient ainsi l'équation d'équilibre suivante :

$$-M_{BC} - M_{BA} = 0$$

- **Equation d'équilibre relative au degré de liberté U**



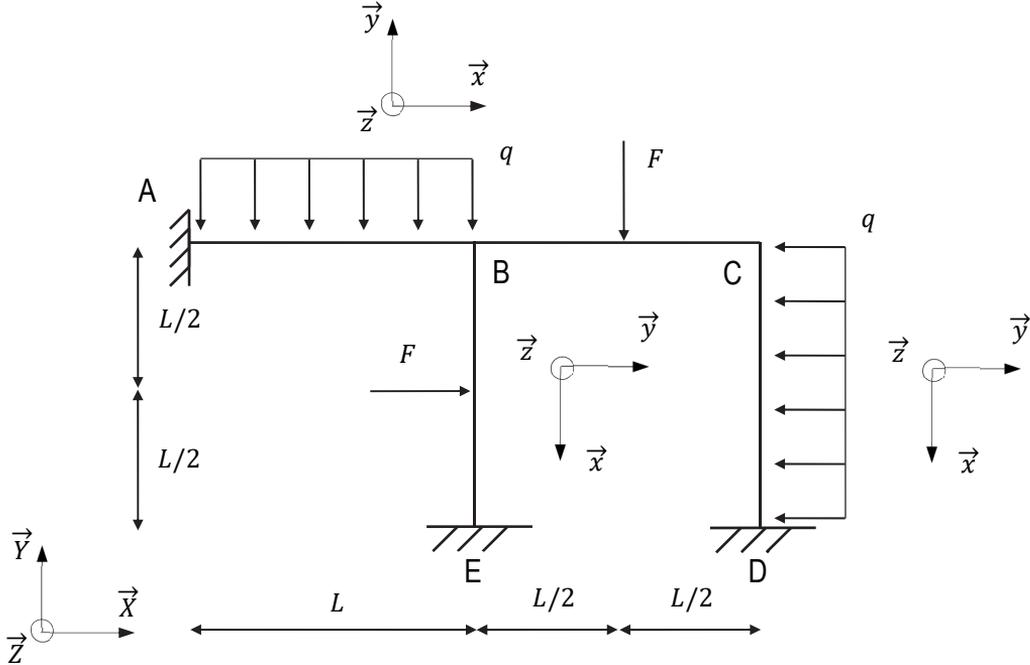
La rotation de la barre AB a pour expression :

$$-\frac{U^*}{L}$$

Etude de la structure d'un entrepôt

La structure d'un entrepôt peut être schématisée comme l'indique la figure ci-dessous. On note I_z le moment quadratique de la section transversale des barres et E le module d'élasticité longitudinale du matériau constituant la structure.

On fera l'hypothèse de longueur invariable des barres, ce qui revient à négliger le déplacement des nœuds dû à la déformation axiale des barres.



Travail demandé

- 1) Déterminer la matrice de rigidité de la structure.
- 2) Déterminer les expressions des rotations des nœuds B et C.
- 3) Déterminer les expressions des sollicitations internes dans la structure.
- 4) Tracer les diagrammes des sollicitations internes dans la structure en considérant l'expression de la charge F suivante : $F = qL$.
- 5) Déterminer les expressions des réactions de liaison aux points A, E et D.

Application numérique :

On donne : $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa ; $I_z = 1\,943$ cm⁴ ; $q = 600$ daN/m ; $F = 1\,800$ daN ; $L = 3$ m

Solution

- 1) Détermination de la matrice de rigidité de la structure

La première étape consiste à déterminer le nombre minimum de composantes de déplacement (translation et rotation) qu'il faut se fixer pour déterminer complètement toutes les composantes de déplacement du système (compte tenu de l'hypothèse de longueur invariable des barres).

Les degrés de liberté de cette structure sont les rotations Ω_B et Ω_C . Les équations relatives aux barres ont donc la même expression dans le repère local et dans le repère général.

- **Equations relatives à la barre AB dans le repère local lié à la barre**

$$\begin{cases} M_{AB} = 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_A + 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_B - 6 \frac{EI_z}{L^2} (v_B - v_A) + M_{AB}^0 \\ M_{BA} = 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_A + 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_B - 6 \frac{EI_z}{L^2} (v_B - v_A) + M_{BA}^0 \end{cases}$$

Pour cette structure ainsi chargée, on peut écrire les égalités suivantes :

$$M_{AB}^0 = \frac{1}{12} qL^2 \text{ et } M_{BA}^0 = -\frac{1}{12} qL^2 \text{ d'après le formulaire des réactions de liaison pour une poutre bi-encastree.}$$

$\Omega_A = 0$, car la liaison au point A est une liaison encastrement, donc la rotation du nœud A est égal à zéro.

$v_A = 0$, car la liaison au point A est une liaison encastrement, donc le déplacement du nœud A est égal à zéro.

$v_B = 0$, car le point B ne peut pas avoir de translation.

On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} M_{AB} = 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + \frac{1}{12} qL^2 \\ M_{BA} = 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_B - \frac{1}{12} qL^2 \end{cases}$$

- **Equations relatives à la barre AB dans le repère général**

Les équations sont inchangées :

$$\begin{cases} M_{AB} = 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + \frac{1}{12} qL^2 \\ M_{BA} = 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_B - \frac{1}{12} qL^2 \end{cases}$$

- **Equations relatives à la barre BC dans le repère local lié à la barre**

$$\begin{cases} M_{BC} = 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_C - 6 \frac{EI_z}{L^2} (v_C - v_B) + M_{BC}^0 \\ M_{CB} = 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_C - 6 \frac{EI_z}{L^2} (v_C - v_B) + M_{CB}^0 \end{cases}$$

Pour cette structure ainsi chargée, on peut écrire les égalités suivantes :

$$M_{BC}^0 = \frac{1}{8} FL \text{ et } M_{CB}^0 = -\frac{1}{8} FL \text{ d'après le formulaire des réactions de liaison pour une poutre bi-encastree.}$$

$v_B = 0$, car le point B ne peut pas avoir de translation.

$v_C = 0$, car le point C ne peut pas avoir de translation.

On obtient :

$$\begin{cases} M_{BC} = 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_C + \frac{1}{8} FL \\ M_{CB} = 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_C - \frac{1}{8} FL \end{cases}$$

- **Equations relatives à la barre BC dans le repère général**

Les équations sont inchangées :

$$\begin{cases} M_{BC} = 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_C + \frac{1}{8} FL \\ M_{CB} = 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_C - \frac{1}{8} FL \end{cases}$$

- **Equations relatives à la barre BE dans le repère local lié à la barre**

$$\begin{cases} M_{BE} = 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_E - 6 \frac{EI_z}{L^2} (v_E - v_B) + M_{BE}^0 \\ M_{EB} = 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_E - 6 \frac{EI_z}{L^2} (v_E - v_B) + M_{EB}^0 \end{cases}$$

Pour cette structure ainsi chargée, on peut écrire les égalités suivantes :

$M_{BE}^0 = -\frac{1}{8} FL$ et $M_{EB}^0 = +\frac{1}{8} FL$ d'après le formulaire des réactions de liaison pour une poutre bi-encastree.

$\Omega_E = 0$, car la liaison au point E est une liaison encastrement, donc la rotation du nœud E est égale à zéro.

$v_E = 0$, car la liaison au point E est une liaison encastrement, donc le déplacement du nœud E est égal à zéro.

$v_B = 0$, car le point B ne peut pas avoir de translation.

On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} M_{BE} = 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_B - \frac{1}{8} FL \\ M_{EB} = 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + \frac{1}{8} FL \end{cases}$$

- **Equations relatives à la barre BC dans le repère général**

Les équations sont inchangées :

$$\begin{cases} M_{BE} = 4 \frac{EI_z}{L} \Omega_B - \frac{1}{8} FL \\ M_{EB} = 2 \frac{EI_z}{L} \Omega_B + \frac{1}{8} FL \end{cases}$$

Cet ouvrage a été achevé en avril 2024
Dépôt légal : avril 2024
Déposé auprès de la BnF (Bibliothèque Nationale de France)