Terminale S

# Arithmétique exercices



## *1. Divers*

### *1-a : Division Euclidienne - 1 (c)*

Dans une division euclidienne entre entiers naturels quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 320 et le reste 39 ?

**Correction**

On a $320 = q\times b+39 \Leftrightarrow q\times b = 320-39 = 281$. Cherchons les diviseurs de 281 : 1 et 281. Ce sont les seules valeurs possibles de $q$ et $b$.

### *1-b : Division Euclidienne-2*

Quel est le nombre de diviseurs de 2880 ?

### *1-c : Division Euclidienne-3 (c)*

1. Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.

2. Déterminer les entiers relatifs $n$ tels que $n-4$ divise 6.

3. Déterminer les entiers relatifs $n$ tels que $n-4$ divise $n+2$.

4. Déterminer les entiers relatifs $n$ tels que $n+1$ divise $3n-4$.

**Correction**

1. L'ensemble des diviseurs de 6 est $D = \{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.

2. $n-4$ divise 6 si $n-4$ appartient à D, soit si $n$ appartient à $D + 4 = \{-2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10\}$.

3. On peut remarquer que $n+2 = n-4+6$. Puisqu'il est évident que $n-4$ divise $n-4$, le résultat du 2. permet alors d'affirmer que si $n-4$ divise $n+2$, alors $n-4$ divise $n+2-(n-4)$ c'est-à-dire $n-4$ divise 6.

Réciproquement si $n-4$ divise 6 alors $n-4$ divise $6+n-4$ c'est-à-dire $n-4$ divise $n+2$. On a donc démontré que $n-4$ divise $n+2$ si et seulement si $n-4$ divise 6.

4. On peut raisonner en utilisant le même principe qu'à la question précédente. On remarque que

$$3n-4 = 3(n+1)-7,$$

et puisqu'il est immédiat que $n+1$ divise $3(n+1)$, on peut écrire :

- si $n+1$ divise $3n-4$, alors $n+1$ divise $3n-4-3(n+1)$ c'est-à-dire $n+1$ divise $-7$ ;

réciproquement : si $n+1$ divise $-7$ alors $n+1$ divise $-7+3(n+1)$ c'est-à-dire $n+1$ divise $3n-4$.

L'ensemble des diviseurs de $-7$ (ou de 7) étant $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$, on en déduit que $n+1$ divise 3n − 4 si et seulement si $n+1$ appartient à $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$ soit $n$ appartient à $\{-8 ; -2 ; 0 ; 6\}$.

### *1-d : Multiples - 1*

$a$ et $b$ sont deux entiers relatifs. Démontrez que si $a^2+b^2$ est divisible par 7 alors $a$ et $b$ sont divisibles par 7.

### *1-e : PGCD - 1 (c)*

Trouvez le PGCD des nombres 1640 et 492 en utilisant la décomposition en facteurs premiers, puis en utilisant l'algorithme d'Euclide.

**Correction**

Avec l'aide de Maple on a immédiatement :

```
> ifactor(1640); ifactor(492);
```

$$(2)^3\,(5)\,(41)$$

$$(2)^2\,(3)\,(41)$$

et le PGCD : $2^2.41 = 164$ . Avec Euclide : $\begin{array}{l} 1640 = 492\times 3+164 \\ 492 = 164\times 3+0 \end{array}$ donc…

### *1-f : PPCM et PGCD - 2*

Trouvez les deux nombres a et b sachant que leur PGCD est 24 et leur PPCM est 1344.

### *1-g : PPCM et PGCD - 3*

Trouvez deux entiers dont la différence entre leur PPCM et leur PGCD est 187.

### *1-h : Théorème de Gauss-1*

1. $a$ est un entier naturel. Montrez que $a^5 - a$ est divisible par 10.

2. $a$ et $b$ sont des entiers naturels avec $a \geq b$ . Démontrez que si $a^5 - b^5$ est divisible par 10 alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

### *1-i : Bases de numération-1*

Trouvez toutes les valeurs des chiffres $x$ et $y$ telles que le nombre $n = \overline{26x95y}$ dans le système décimal soit divisible par 3 et 11.

### *1-j : Bases de numération-2*

A est le nombre qui s'écrit 16524 dans le système à base 7. Ecrivez ce nombre en bases 10, puis 2 et enfin 16 (tous les calculs doivent apparaître).

***1-k : Bases de numération-3***

Le nombre N s'écrit 23 dans le système décimal. Peut-il s'écrire 27 dans une autre base ?

***1-l : Congruences-1 (c)***

Quel est le reste de la division par 7 du nombre $(32)^{45}$

**<u>Correction</u>**

Le reste de 32 dans la division par 7 est 4 ; $4^2$ donne 2, $4^3$ donne 8, soit 1 ; comme 45 = 15.3, on a :

$$32^{45} \equiv 4^{45}(7) \equiv \left(4^3\right)^{15}(7) \equiv (1)^{15}(7) \equiv 1(7).$$

Le reste est donc 1.

***1-m : Congruences-2***

Démontrez que le nombre $n = ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3 pour tous les entiers relatifs $a$ et $b$.

***1-n : Congruences-3 (c)***

1. Déterminer les restes de la division de $5^p$ par 13 pour $p$ entier naturel.

2. En déduire que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

**<u>Correction</u>**

1. $p = 0 : 1$, $p = 1 : 5$, $p = 2 : -1$ ou 12, $p = 3 : -5$ ou 8, $p = 4 : 1$ donc

pour $p = 4k$ le reste est 1,

pour $p = 4k+1$ le reste est 5,

pour $p = 4k+2$ le reste est 12 ou $-1$,

pour $p = 4k+3$ le reste est 8 ou $-5$.

2. $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ : $31 = 2\times 13 + 5 \equiv 5(13)$ et $18 = 13\times 1 + 5 \equiv 5(13)$ ; on a donc

$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv \left[5^{4n+1} + 5^{4n-1}\right](13) \equiv \left[5^{4n+1} + 5^{4n'+3}\right](13) \equiv [5+8](13) \equiv 0(13)$.

***1-o : Divers-1***

Un nombre qui s'écrit avec 4 chiffres identiques peut-il être un carré parfait (carré d'un nombre entier) ?

***1-p : Divers-2***

Démontrez qu'un entier congru à 7 modulo 8 ne peut être égal à la somme de trois carrés.

***1-q : Divers-3***

$a$ et $b$ sont deux entiers positifs premiers entre eux. Montrez que $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux.

***1-r : Divers-4***

On considère la fraction $\dfrac{n^3+n}{2n+1}$ avec $n$ entier positif.

a. prouvez que tout diviseur commun $d$ à $2n + 1$ et $n^3 + n$ est premier avec $n$.

b. Déduisez en que $d$ divise $n^2 + 1$, puis que $d = 1$ ou $d = 5$.

c. Quelles sont les valeurs de $n$ pour lesquelles la fraction est irréductible ?

***1-s : Nombres Premiers-1***

Le nombre 401 est-il premier ? Résolvez en entiers naturels l'équation $x^2 - y^2 = 401$.

***1-t : Nombres Premiers-2***

$p$ et $q$ sont des entiers naturels.

1. Démontrez que $2^{pq}-1$ est divisible par $2^p-1$ et par $2^q-1$.

2. Déduisez en que pour que $2^n-1$ soit premier, il faut que $n$ soit premier.

3. Prouvez à l'aide d'un contre-exemple que la condition « $n$ est premier » n'est pas suffisante pour que $2^n-1$ soit premier.

### 1-u : Nombres Premiers-3

Soit $p$ un entier premier. Montrer que si $p\geq 5$ alors 24 divise $p^2-1$.

### 1-v : Démonstration de Fermat

Soit $p$, un entier naturel premier.

1. a. Démontrer que si $k$ est un entier naturel tel que $1\leq k\leq p-1$, le nombre $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ est divisible par $p$.

1. b. En déduire que, quel que soit l'entier $n$, le nombre $(n+1)^p-n^p-1$ est divisible par $p$.

2. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel $n$, $n^p - n$ est divisible par $p$ (on pourra faire un raisonnement par récurrence).

3. Montrer que pour tout entier $n$ premier avec $p$, $n^{p-1}-1$ est divisible par $p$.

## 2. Bézout

### 2-a : Bezout-1

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres $x$ et $y$ entiers relatifs tels que $31x-28y=1$.

2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $31x-28y=414$.

3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On donne les points A$(-30\,;-48)$ et B$(82\,;76)$. On appelle $(D)$ la droite (AB).

a. Trouver l'ensemble des points M$(x\,;y)$ de $(D)$ dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de –10 à +10 en abscisses et de –14 à +14 en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de $(D)$ à coordonnées entières visible sur le graphique.

c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à $[-40\,;+40]$ en abscisses et à $[-50\,;+10]$ en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

### 2-b : Bezout-2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $13x-23y=1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $-156x+276y=24$.

### 2-c : Bezout-3

1. Démontrer que, pour que la relation suivante $\frac{x}{9}-\frac{y}{4}=3$ soit satisfaite, pour $x$ et $y$ entiers naturels, il faut prendre $x$ et $y$ de la forme : $x=9(k+3)$ et $y=4k$ avec $k$ entier naturel.

2. Démontrer que le PGCD de $x$ et $y$ ne peut être qu'un diviseur de 108.

3. On pose $m$ = PPCM$(x\,;y)$ et on envisage la décomposition de $m$ en facteurs premiers. Comment faut il choisir $k$ pour que :

a. $m$ ne contienne pas le facteur 2 ?

b. $m$ contienne le facteur 2 ou le facteur $2^2$ ?

c. $m$ ne contienne pas le facteur 3 ?

d. $m$ contienne le facteur 3, ou le facteur $3^2$, ou le facteur $3^3$ ?

4. Comment faut-il choisir $x$ et $y$ de telle façon que l'on ait PGCD($x$ ; $y$) = 18 ?

***2-d : Bezout-4***

1. Décomposer 319 en facteurs premiers.

2. Démontrer que si $x$ et $y$ sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour les nombres $3x + 5y$ et $x + 2y$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système d'inconnues $a$ et $b$ :

$$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b)=1276 \\ ab=2m \end{cases} \quad \text{où } m \text{ est le PPCM de } a \text{ et } b.$$

***2-e : Bezout-5***

Au 8° siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

## *3. Quadratique*

*Bac 2000 ( ?)*

1. Soit $x$ un entier impair. Quel est le reste de la division de $x^2$ par 8 ?

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 8y + 1$.

3. On veut tracer sur l'écran d'une calculatrice comportant 320 points de large sur 200 points de haut les points à coordonnées entières de la courbe d'équation $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}$.

Le repère choisi a son origine en bas à gauche de l'écran, et chaque point de l'écran a pour coordonnées sa position à l'écran – 1 (par exemple, le point en haut à droite aura pour coordonnées (319 ; 199)). Combien de points pourra-t-on tracer ?

## *4. Divisibilité*

Le nombre $n$ est un entier naturel non nul. On pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$. On note $d$ le PGCD de $a$ et $b$.

1. Donner la valeur de $d$ dans les cas suivants : $n=1$, $n=11$, $n=15$.

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de $d$.

3. a. Déterminer les entiers naturels $n$ et $k$ tels que $4n + 3 = 7k$.

b. Déterminer les entiers naturels $n$ et $k'$ tels que $5n + 2 = 7k'$.

4. Soit $r$ le reste de la division euclidienne de $n$ par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de $r$ pour laquelle $d$ vaut 7. Pour quelles valeurs de $r$, $d$ est-il égal à 1 ?

## *5. Equation diophantienne*

1. On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a, b)$ d'entiers naturels tels que $a + b = 11994$ et dont le PGCD vaut 1999.

2. On considère l'équation (E) : $n^2 - Sn + 11994 = 0$ où S est un entier naturel. On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{Z}$

a. Peut on trouver S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.

b. Même question avec 5 ?

c. Montrer que tout entier $n$ solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de S.

## *6. Equation diophantienne (2, Caracas 01_04)*

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que $a$ et $b$ sont divisibles par $n - 4$.

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note $d$ le *pgcd* de $\alpha$ et $\beta$.

a. Etablir une relation entre $\alpha$ et $\beta$ indépendante de $n$.

b. Démontrer que 5 divise $d$.

c. Démontrer que les nombres $\alpha$ et $\beta$ sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3. Montrer que $2n + 1$ et $n$ sont premiers entre eux.

4. a. Déterminer, suivant les valeurs de $n$ et en fonction de $n$, le *pgcd* de $a$ et $b$. (On pourra utiliser les résultats des questions 2.c. et 3.)

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

### *7. Base de numération*

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5242 + 13x = 6y$.

2. Soit $N$ le nombre dont l'écriture dans le système de numération de base 13 est $N = \overline{25x3}$. Pour quelles valeurs de $x$ :

* $N$ est-il divisible par 6 ?

* $N$ est-il divisible par 4 ?

* $N$ est-il divisible par 24 ? (24 est écrit en décimal…).

### *8. Base de numération 3*

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

En déduire que $3^{2n+2} + 7$ est un multiple de 8 et que $3^{2n+4} - 1$ est un multiple de 8.

2. Déterminer les restes de la division par 8 des puissances de 3.

3. Le nombre $p$ étant un entier naturel, on considère le nombre $A_p$ défini par : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$.

a. Si $p = 2n$, quel est le reste de la division de $A_p$ par 8 ?

b. Démontrer que, si $p = 2n + 1$, $A_p$ est divisible par 8.

4. On considère les nombres a et b écrits dans le système "base 3" :

$a = \overline{1110}_{\text{trois}}$.

$b = \overline{101010100}_{\text{trois}}$.

Les nombres $a$ et $b$ sont-ils divisibles par 8 ?

5. De même, on considère le nombre $c = \overline{2002002002000}_{\text{trois}}$. Démontrer que $c$ est divisible par 16.

*Remarque : pour les questions 4 et 5, on raisonnera sans utiliser la valeur numérique en base dix des nombres a, b, c.*

### *9. Somme des cubes*

1. Calculer, en fonction de $n$, la somme des $n$ premiers entiers naturels non nuls.

2. Démontrer par récurrence que $\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{n} p\right)^2$. Exprimer $s_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$ en fonction de $n$.

3. Soit $D_n$ le PGCD des nombres $s_n$ et $s_{n+1}$. Calculer $D_n$ lorsque

a. $n = 2k$,

b. $n = 2k+1$.

En déduire que $s_n$, $s_{n+1}$ et $s_{n+2}$ sont premiers entre eux.

### *10. PGCD*

Pour tout entier naturel $n$, non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4\times 10^n - 1\ ,\ b_n = 2\times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2\times 10^n + 1\,.$$

1. a. Calculer $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$, $a_3$, $b_3$ et $c_3$.

b. Combien les écritures décimales des nombres $a_n$ et $c_n$ ont-elles de chiffres ? Montrer que $a_n$ et $c_n$ sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous que $b_3$ est premier.

d. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$ .

e. Montrer que $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$ . En déduire que $b_n$ et $c_n$ sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (**1**) : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs $x$ et $y$.

a. Justifier le fait que (**1**) a au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres $c_3$ et $b_3$ ; en déduire une solution particulière de (**1**).

c. Résoudre l'équation (**1**).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

## *11. Somme des diviseurs*

1. On considère le nombre $n = 200 = 2^3 5^2$ .

a. Combien $n$ a-t-il de diviseurs ? En utilisant un arbre, calculez les tous et faites leur somme $s$.

b. Vérifiez que $s = (1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)$ .

2. On considère maintenant le nombre $N = a^\alpha b^\beta$ où $a$ et $b$ sont deux nombre premiers, $\alpha$ et $\beta$ des entiers.

a. Quel est le nombre de diviseurs de $N$ ?

b. Soit $S$ la somme des diviseurs de $N$. Montrez que $S = (1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)$ .

Déduisez en une expression « simple » de S.

c. Montrez alors que pour $\alpha$ et $\beta$ suffisamment grands on a $\dfrac{S}{N} \approx \dfrac{a}{a-1}.\dfrac{b}{b-1}$ .

3. Application numérique : $N = 5^{100} 7^{200}$ ; trouver une valeur approchée de S.

Rappel : la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$ est $u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .

**Correction** : voir *Antisèches TS*.

## *12. Banque exercices 2004 - 29*

L'exercice propose cinq affirmations numérotées de 1 à 5.

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 8.
2. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.
3. Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.
4. Si deux entiers $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors les entiers $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux.
5. Si deux entiers $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors les entiers $2a + b$ et $3a + 2b$ sont premiers entre eux.

### *13. Banque exercices 2004 - 30*

Cet exercice, trop long pour un exercice de spécialité, est présenté dans son intégralité pour respecter sa cohérence ainsi que le travail de l'auteur.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $7u - 13v = 1$.

b. En déduire deux entiers relatifs $u_0$ et $v_0$ tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.

c. Déterminer tous les couples $(a, k)$ d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.

2. On considère deux entiers naturels $a$ et $b$. Pour tout entier $n$, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lettre | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| Nombre | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Lettre | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| Nombre | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Pour chaque lettre $\alpha$ du message, on détermine l'entier $n$ associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre $\alpha$ est alors codée par la lettre associée à $\varphi$(n).

On ne connaît pas les entiers $a$ et $b$, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a. Montrer que les entiers $a$ et $b$ sont tels que : $\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}$.

b. En déduire qu'il existe un entier $k$ tel que $14a - 26k = 4$.

c. Déterminer tous les couples d'entiers $(a, b)$, avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, tels que

$$\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}.$$

3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Coder le message « GAUSS ».

b. Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n - p) = 0$ modulo 26.

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Soit $n$ un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26.

b. En déduire un procédé de décodage.

c. En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

### *14. Banque exercices 2004 - 31*

Des nombres étranges (part one)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour $k$ entier strictement positif, on note $N_k$ le rep-unit qui s'écrit à l'aide de $k$ chiffres 1.

Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, …

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. A quelle condition sur $k$ le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit $N_k$ ? Justifier brièvement la réponse.

3. Pour $k > 1$, le rep-unit $N_k$ est défini par $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1+10+100+\ldots+10^{k-1}$.

Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$ pour tout entier $k > 1$.

4. Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de $10^k$, pour $k$ entier compris entre 1 et 8.

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste de la division de $10^k$ par 7 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 |

Soit $k$ un entier strictement positif. Démontrer que : « $10^k \equiv 1(7)$ » équivaut à « $k$ est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise $N_k$ si et seulement si $k$ est multiple de 6.

## *15. Banque exercices 2004 - 32*

Des nombres étranges (part two)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens. Cet exercice propose d'en découvrir quelques unes.

Pour $k$ entier strictement positif, on note $N_k$ le rep-unit qui s'écrit à l'aide de $k$ chiffres 1. Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, …

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. Donner la décomposition en facteurs premiers de $N_3$, $N_4$ et $N_5$.

3. Soit $n$ un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de $n^2$ se termine par le chiffre 1.

a. Montrer que, dans son écriture décimale, $n$ se termine lui-même par 1 ou par 9.

b. Montrer qu'il existe un entier $m$ tel que $n$ s'écrive sous la forme $10m + 1$ ou $10m - 1$.

c. En déduire que $n^2 \equiv 1(20)$.

4. a. Soit $k > 2$. Quel est le reste de la division de $N_k$ par 20 ?

b. En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré.

## *16. Banque exercices 2005 - 26*

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $u_n = 1!+2!+\ldots+n!$

On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite $(u_n)$.

$$\begin{array}{ll}
u_1 = 1 & u_6 = 3^2 \times 97 \\
u_2 = 3 & u_7 = 3^4 \times 73 \\
u_3 = 3^2 & u_8 = 3^2 \times 11 \times 467 \\
u_4 = 3 \times 11 & u_9 = 3^2 \times 131 \times 347 \\
u_5 = 3^2 \times 17 & u_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787
\end{array}$$

1. Montrer que $u_n$ n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.

2. Peut-on affirmer que $u_n$ est divisible par 11 à partir d'un certain rang ?

3. Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, $u_n$ est divisible par $3^2$ mais pas par $3^3$ ?

## *17. Banque exercices 2005 - 38*

On considère les dix caractères A, B, C, D, E, F, G, H, I et J auxquels on associe dans l'ordre les nombres entiers de 1 à 10. On note $\Omega = \{1, 2, ..., 10\}$. On appelle *message* tout mot, ayant un sens ou non, formé avec ces dix caractères.

1. On désigne par $f$ la fonction définie sur $\Omega$ par « $f(n)$ est le reste de la division euclidienne de $5^n$ par 11 ».

On désire coder à l'aide de $f$ le message « BACF ». Compléter la grille de chiffrement ci-dessous :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Lettre | B | A | C | F |
| $n$ | 2 | 1 | 3 | 6 |
| $f(n)$ | 3 | | | |
| Lettre | C | | | |

Peut-on déchiffrer le message codé avec certitude ?

2. On désigne par $g$ la fonction définie sur $\Omega$ par « $g(n)$ est le reste de la division euclidienne de $2^n$ par 11 ». Etablir, sur le modèle précédent, la grille de chiffrement de $g$. Permet-elle le déchiffrement avec certitude de tout message codé à l'aide de $g$ ?

3. Le but de cette question est de déterminer des conditions sur l'entier $a$ compris entre 1 et 10 pour que la fonction $h$ définie sur E par « $h(n)$ est le reste de la division euclidienne de $a^n$ par 11 » permette de chiffrer et déchiffrer avec certitude un message de 10 caractères.

Soit $i$ un élément de $\Omega$.

a. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que si, pour tout $i \in \Omega$, $i < 10$, $a^i$ n'est pas congru à 1 modulo 11, alors la fonction $h$ permet le déchiffrement avec certitude de tous messages.

b. Montrer que s'il existe $i \in \Omega$, $i < 10$, tel que $a^i \equiv 1[11]$, alors la fonction $h$ ne permet pas de déchiffrer un message avec certitude.

c. On suppose que $i$ est le plus petit entier naturel tel que $1 \le i \le 10$ vérifiant $a^i \equiv 1[11]$.

En utilisant la division euclidienne de 10 par $i$, prouver que $i$ est un diviseur de 10.

d. Quelle condition doit vérifier le nombre $a$ pour permettre le chiffrage et le déchiffrage sans ambiguïté de tous messages à l'aide de la fonction $h$ ? Faire la liste de ces nombres.

## *18. Polynésie, juin 2006 (c)*

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

**Proposition 1 :** « Pour tout entier naturel $n$, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

**Proposition 2 :** « Si un entier relatif $x$ est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$ alors $x \equiv 0 \pmod{3}$ ».

**Proposition 3 :** « L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4+10k\,;\,9+24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

**Proposition 4 :** « Il existe un seul couple $(a\,;\,b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$ ».

Deux entiers naturels $M$ et $N$ sont tels que $M$ a pour écriture $abc$ en base dix et $N$ a pour écriture $bca$ en base dix.

**Proposition 5 :** « Si l'entier $M$ est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

**<u>Correction</u>**

**Proposition 1 : Vrai.**

On fait l'essai. Ca semble marcher.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{2n}-1$ | 3 | 15 | 63 | 255 | 1023 | 4095 | 16383 |
| reste | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Vérifions : $2^{2n}=\left(2^2\right)^n=4^n\equiv 1[3]\Rightarrow 2^{2n}-1\equiv 0[3]$.

**Proposition 2 : Faux.**

$x^2+x=x(x+1)$ est un multiple de 2 donc pour que ce soit un multiple de 6, il faut qu'un des deux termes $x$ ou $x+1$ soit un multiple de 3 ; on pourrait alors avoir $x+1\equiv 0[3]\Leftrightarrow x\equiv 2[3]$. Par exemple 5 donne $25+5=30$ qui est bien un multiple de 3.

**Proposition 3 : Faux.**

$12x-5y=3$ a comme solution particulière $x=4$ et $y=9$ ; on a alors

$$\begin{cases}12x-5y=3\\12\times 4-5\times 9=3\end{cases}\Rightarrow 12(x-4)-5(y-9)=0\Leftrightarrow 12(x-4)=5(y-9)\Leftrightarrow\begin{cases}x-4=5k\\y-9=12k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4+5k\\y=9+12k\end{cases}.$$

**Proposition 4 : Vrai.**

Posons $\begin{cases}a=a_1k\\b=b_1k\end{cases}$ où $k$ est PGCD($a$, $b$) ; on a alors $a_1b_1k-k=1\Rightarrow k=1$ sinon $k$ diviserait 1. Notre équation devient alors : PPCM($a$, $b$) − PGCD($a$, $b$) = 1 devient donc $ab-1=1\Leftrightarrow ab=2\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$.

Deux entiers naturels $M$ et $N$ sont tels que $M$ a pour écriture $abc$ en base dix et $N$ a pour écriture $bca$ en base dix.

**Proposition 5 : Vrai.**

$M=\overline{abc}=100a+10b+c$, $N=\overline{bca}=100b+10c+a$ donc

$$M-N=100a+10b+c-100b-10c-a=9(11a-10b-c)$$

est divisible par 27 si $11a-10b-c$ est divisible par 3.

Sachant qu'on a $M=100a+10b+c=27k\Leftrightarrow 10b+c=27k-100a$, on remplace :

$$11a-10b-c=11a-27k+100a=111a-27k\ ;$$

or 111 est un multiple de 3. Ok.

### *19. National, juin 2006 (c)*

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\begin{cases}n\equiv 13(19)\\n\equiv 6(12)\end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple ($u$ ; $v$) d'entiers relatifs tel que : $19u+12v=1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N=13\times 12v+6\times 19u$ est une solution de ($S$).

2. a. Soit $n_0$ une solution de ($S$), vérifier que le système ($S$) équivaut à $\begin{cases}n\equiv n_0\,(19)\\n\equiv n_0\,(12)\end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0\,(12\times 19)$.

3. a. Trouver un couple $(u\,;v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de $N$ correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de $(S)$ (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel $n$ est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise $n$ par $228 = 12\times 19$. Quel est le reste $r$ de cette division ?

**Correction**

**Partie A** : Question de cours, voir démonstrations arithmétique.

**Partie B :** $(S)\begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 13+19k \\ n \equiv 6+12k' \end{cases}$.

1. Théorème de Bézout : 19 et 12 sont premiers entre eux donc il existe un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

$N = 13\times 12v + 6\times 19u$ est une solution de $(S)$ : il faut mettre N sous la forme $N \equiv 13+19k$. Or $12v = 1-19u$ donc $N = 13(1-19u)+6\times 19u = 13+19\times(-7u)$ ; ok.

De même $N = 13\times 12v + 6\times 19u = 13\times 12v + 6(1-12v) = 6+12\times 7v$ ; ok.

2. a. Si $n_0$ est une solution de $(S)$, on a $\begin{cases} n_0 = 13+19k_0 \\ n_0 = 6+12k_0' \end{cases}$ d'où en soustrayant ligne à ligne :

$$\begin{cases} n-n_0 = 19(k-k_0) \\ n-n_0 = 12(k'-k_0') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}.$$

b. En fait 19 divise $n-n_0$ de même que 12 ; comme ils sont premiers entre eux, $19\times 12$ divise $n-n_0$, ce qui équivaut à $n \equiv n_0\,(12\times 19)$.

3. a. Avec l'algorithme d'Euclide on a $19(-5)+12(8)=1$ ; on peut donc prendre $u = -5$ dans $N = 13+19\times(-7u)$, ce qui donne $N = 678$ ; de même on prend $v = 8$ et $N = 6+12\times(7v)$, ce qui redonne bien $N = 678$.

b. $n \equiv n_0\,(12\times 19) \equiv 678(12\times 19) \equiv 678(228) \equiv 222(228)$.

4. 222.

***20. Centres étrangers, juin 2006***

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4n-1$, lorsque $n$ est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si $p$ est un nombre entier et $a$ un entier naturel premier avec $p$, alors $a^{p-1}-1 \equiv 0 \bmod p$ ».

Partie A : quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $4^n$ est congru à 1 modulo 3.

2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28}-1$ est divisible par 29.

3. Pour $1 \le n \le 4$, déterminer le reste de la division de $4^n$ par 17. En déduire que, pour tout entier $k$, le nombre $4^{4k}-1$ est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels $n$ le nombre $4^n-1$ est-il divisible par 5 ?

5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28}-1$.

Partie B : divisibilité par un nombre premier

Soit $p$ un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$.

2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$ .Onnote $b$ le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \bmod p$ et $r$ le reste de la division euclidienne de $n$ par $b$.

a. Démontrer que $4^r \equiv 1 \bmod p$. En déduire que $r = 0$.

b. Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par $p$ si et seulement si $n$ est multiple de $b$.

c. En déduire que $b$ divise $p - 1$.

### *21. Asie, juin 2006*

Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels $x$, $y$ et $z$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo $2n$.

Partie A Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.

a. Soit $m$ un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste $r$ de la division euclidienne de $m$ par 8 et le reste $R$ de la division euclidienne de $m^2$ par 8.

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$ | | | | | | | | |

b. Peut-on trouver trois entiers naturels $x$, $y$ et $z$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8 ?

Partie B Étude du cas général où $n \geq 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels $x$, $y$ et $z$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo $2n$.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels $x$, $y$ et $z$ sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2. On suppose que $x$ et $y$ sont pairs et que $z$ est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r$, $z = 2s + 1$ où $q$, $r$, $s$ sont des entiers naturels.

a. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ modulo 4.

b. En déduire une contradiction.

3. On suppose que $x$, $y$, $z$ sont impairs.

a. Prouver que, pour tout entier naturel $k$ non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.

b. En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ modulo 8.

c. Conclure.

### *22. Amérique du Sud, sept. 2005*

Le plan complexe $P$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $a$, $b$, $c$ et $d$ telles que :

$$a = i,\ b = 1 + 2i,\ c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } d = 3 + 2i.$$

On considère la similitude directe $s$ qui transforme $A$ en $B$ et $C$ en $D$. Soit $M$ un point d'affixe $z$ et $M'$, d'affixe $z'$, son image par $s$.

1. Exprimer $z'$ en fonction de $z$. Déterminer les éléments caractéristiques de $s$.

Soit $(U_n)$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1}$ et $U_n$ sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude $s$, les termes dela suite $(U_n)$.

4. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $U_n = 2^n - 1$ .

5. Montrer que, pour tous entiers naturels $n$ et $p$ non nuls tels que $n \geq p$ , $U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$ .

La notation pgcd($a$ ; $b$) est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels $a$ et $b$. Montrer pour $n \geq p$ l'égalité

$$\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p}) .$$

6. Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls, montrer que : $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n,\, p)}$ . Déterminer le nombre : pgcd($U_{2005}$ , $U_{15}$).

***23. National, sept. 2005***

*Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidatindiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*

*Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0$ (modulo 6) .

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$ .

D : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$ ou $x \equiv 5(6)$ .

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (34k-7 ; 5-24k)$, $k \in \mathbb{Z}$ .

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (17k-7 ; 5-12k)$, $k \in \mathbb{Z}$ .

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (-7k ; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$ .

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 17\,892\,005$. On a alors :

A : $n \equiv 4(17)$ et $p \equiv 0(17)$ .

C : $p \equiv 4(17)$ .

B : $p$ est un nombre premier.

D : $p \equiv 1(17)$ .

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a$ et $b$. Le triangle $MAB$ est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si et seulement si le point $M$ d'affixe $z$ est tel que :

A : $z = \dfrac{b - ia}{1 - i}$ .

C: $a - z = i(b - z)$.

B : $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a)$ .

D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$ .

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts $A$ et $B$ ; on note $I$ le milieu du segment $[AB]$. Soit $f$ la similitude directe de centre $A$, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ ; soit $g$ la similitude directe de centre $A$, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ ; soit $h$ la symétrie centrale de centre $I$.

A : $h\circ g\circ f$ transforme $A$ en $B$ et c'est une rotation.

B : $h\circ g\circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.

C : $h\circ g\circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h\circ g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ .

### *24. Antilles, juin 2005*

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul $n$ le reste dans la division euclidienne par 9 de $7^n$.

b. Démontrer alors que $(2005)^{2005}\equiv 7(9)$ .

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul $n$ : $((10)^n \equiv 1(9)$ .

b. On désigne par $N$ un entier naturel écrit en base dix, on appelle $S$ la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : $N\equiv S(9)$ .

c. En déduire que $N$ est divisible par 9 si et seulement si $S$ est divisible par 9.

3. On suppose que $A=(2005)^{2005}$ ; on désigne par :

– $B$ la somme des chiffres de $A$ ;

– $C$ la somme des chiffres de $B$ ;

– $D$ la somme des chiffres de $C$.

a. Démontrer la relation suivante : $A\equiv D(9)$ .

b. Sachant que 2005 < 10000, démontrer que $A$ s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B\le 72180$ .

c. Démontrer que $C\le 45$ .

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de $D$ plus petit que 15.

e. Démontrer que $D = 7$.

### *25. Centres étrangers, juin 2005 (c)*

**Partie A**

Soit $N$ un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N=a^2-b^2$ où $a$ et $b$ sont deux entiers naturels.

1. Montrer que $a$ et $b$ n'ont pas la même parité.

2. Montrer que $N$ peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels $p$ et $q$.

3. Quelle est la parité de $p$ et de $q$ ?

**Partie B**

On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels ($a$ ; $b$) vérifiant la relation (E) : $a^2-250\,507=b^2$ .

1. Soit $X$ un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de $X$ modulo 9 ; puis ceux de $X^2$ modulo 9.

b. Sachant que $a^2-250\,507=b^2$ , déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2-250\,507$ ; en déduire les restes possibles modulo 9 de $a^2$ .

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de $a$ sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple ($a$ ; $b$) vérifie la relation (E), alors $a\ge 501$ . Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 ; $b$).

3. On suppose que le couple ($a$ ; $b$) vérifie la relation (E).

a. Démontrer que $a$ est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel $k$ tel que le couple $(505+9k\ ;\ b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.

2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?

3. Cette écriture est-elle unique ?

**Correction**

**Partie A**

1. $N=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ :

s'ils sont tous les deux pairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;

s'ils sont tous les deux impairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;

comme $N$ est impair, $a$ et $b$ n'ont pas la même parité.

2. Evident : $N=a^2-b^2=(a-b)(a+b)=pq$.

3. Comme il a été dit, pour que le produit soit impair, il faut qu'ils n'aient pas la même parité.

**Partie B**

1. a.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $X^2$ | 0 | 1 | 4 | 0 | −2 = 7 | −2 = 7 | 0 | 4 | 1 |
| $X^2-1$ | −1 = 8 | 0 | 3 | −1 = 8 | 6 | 6 | −1 = 8 | 3 | 0 |

b. On a 250 507 = 27 834 . 9 + 1, donc les restes possibles modulo 9 de $a^2-250\,507$ sont ceux de $X^2-1$.

c. Comme $a^2-250\,507=b^2$, les restes doivent être égaux modulo 9, on a $a^2\equiv b^2+1(9)$ ;

*si on prend $b\equiv 0(9)$ alors $a^2\equiv 1(9)\Rightarrow a\equiv 1(9)$ ou $a\equiv 8(9)$,

*si on prend $b\equiv 1(9)$ alors $a^2\equiv 2(9)$, ce qui est impossible,

*si on prend $b\equiv 2(9)$ alors $a^2\equiv 5(9)$, ce qui est impossible, etc.

2. On a $a^2-250\,507=b^2$ d'où $a^2=250\,507+b^2\geq 250\,507=(500,\ldots)^2\geq 501^2$ donc $a\geq 501$. Si on avait une solution du type (501 ; $b$), on aurait $251001-250507=b^2\Leftrightarrow b^2=494$ or 494 n'est pas un carré parfait.

3. a. $a$ est congru à 1 ou 8 modulo 9 et doit être supérieur à 501, lequel est congru à 6 mod 9 ; on peut donc prendre $503\equiv 8(9)$ ou $505\equiv 1(9)$.

b. Le plus simple est de faire quelques essais :

| $a$ | $a^2-250507$ | $\sqrt{a^2-\ldots}$ |
|---|---|---|
| 505 | 4518 | 67,2160695 |
| 514 | 13689 | 117 |
| 523 | 23022 | 151,730023 |
| 532 | 32517 | 180,324707 |
| 541 | 42174 | 205,363093 |
| 550 | 51993 | 228,019736 |
| 559 | 61974 | 248,945777 |

| | | |
|---|---|---|
| 568 | 72117 | 268,546085 |
| 577 | 82422 | 287,09232 |

On a donc la première solution pour $k = 1$, ce qui donne la solution (514, 117).

**Partie C**

1. On a $250\ 507 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (514-117)(514+117) = 397.631$.

2. Appliquons l'algorithme d'Euclide :

| $u$ | $v$ | quotient | reste |
|---|---|---|---|
| 631 | 397 | 1 | 234 |
| 397 | 234 | 1 | 163 |
| 234 | 163 | 1 | 71 |
| 163 | 71 | 2 | 21 |
| 71 | 21 | 3 | 8 |
| 21 | 8 | 2 | 5 |
| 8 | 5 | 1 | 3 |
| 5 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 1 |

Le PGCD est 1, les deux nombres sont premiers entre eux.

3. Cette écriture ne sera pas unique (mis à part $p = 1$, $q = 250507$, par exemple) si 397 n'est pas un nombre premier. Or 397 est premier, la décomposition est bien unique.

## *26. Liban, juin 2005*

1. On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k, 68+109k)$, où $k$ appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul $d$ inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul $e$ tels que $109d = 1+226e$. (On précisera les valeurs des entiers $d$ et $e$.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note $A$ l'ensemble des 227 entiers naturels $a$ tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions $f$ et $g$ de $A$ dans $A$ définies de la manière suivante :

à tout entier de $A$, $f$ associe le reste de la division euclidienne de $a^{109}$ par 227 ;

à tout entier de $A$, $g$ associe le reste de la division euclidienne de $a^{141}$ par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

**Si $p$ est un nombre premier et $a$ un entier non divisible par $p$ alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo $p$.**

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul $a$ de $A$, $a^{226} \equiv 1[\text{modulo } 227]$.

c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul $a$ de $A$, $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[(g\ (a)] = a$ ?

## *27. Polynésie, juin 2005*

On considère la suite $(u_n)$ d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel $n$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de $u_n$ ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} \equiv u_n (\text{modulo } 4)$. En déduire que pour tout entier naturel $k$,

$$u_{2k} \equiv 2 (\text{modulo } 4) \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 (\text{modulo } 4).$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $2u_n \equiv 28 (\text{modulo } 100)$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de $u_n$ suivant les valeurs de $n$.

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite $(u_n)$ est constant. Préciser sa valeur.

### *28. La Réunion, juin 2005*

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Étant donnés deux entiers naturels $a$ et $b$ non nuls, si PGCD($a$ ; $b$) = 1 alors PGCD($a^2$ ; $b^2$) = 1 ».

Une suite $(S_n)$ est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul $n$, le plus grand commun diviseur de $S_n$ et $S_{n+1}$.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où $n$ est pair. Soit $k$ l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

a. Démontrer que $\text{PGCD}(S_{2k} ; S_{2k+1}) = (2k+1)^2 \text{ PGCD}(k^2 ; (k+1)^2)$.

b. Calculer PGCD ($k$ ; $k+1$).

c. Calculer PGCD($S_{2k}$ ; $S_{2k+1}$).

3. Étude du cas où $n$ est impair. Soit $k$ l'entier naturel non nul tel que $n = 2k + 1$.

a. Démontrer que les entiers $2k + 1$ et $2k + 3$ sont premiers entre eux.

b. Calculer PGCD($S_{2k+1}$ ; $S_{2k+2}$).

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de $n$, que l'on déterminera, pour laquelle $S_n$ et $S_{n+1}$ sont premiers entre eux.

### *29. Nouvelle-Calédonie, nov 2004 (c)*

Dans cet exercice $a$ et $b$ désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au + bv = 1$ alors les nombres $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$ alors $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs ($a$ ; $b$) tels que $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer $a$ lorsque $a = b$.

b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si ($a$ ; $b$) est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. a. Montrer que si ($x$ ; $y$) est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y - x ; x)$ et $(y ; y + x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier $n$, $n \geq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $(a_n\ ; a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres $a_n$ et $a_{n+1}$ sont premiers entre eux.

**Correction**

1. a. Démonstration de cours.

b. $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab-b^2=1 \\ a^2+ab-b^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+b)-b\times b=1 \\ b(b-a)-a\times a=1 \end{cases}$. Dans les deux cas on peut écrire $au+bv=1$ : dans le premier $u=a+v,\ v=-b$, dans le second $u=b-a,\ v=-a$.

2. a. $a=b$ : $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1 \Leftrightarrow a^4=1 \Rightarrow a=1$ ($a>0$).

b. (1 ; 1) est déjà fait, (2 ; 3) : $\left(2^2+2.3-3^2\right)^2=1$ et (5 ; 8) : $\left(5^2+5.8-8^2\right)^2=(25+40-64)^2=1$.

c. $a^2+ab-b^2=1$ : si on a $a^2-b^2>0$, alors $a^2+ab-b^2$ ne peut pas valoir 1 ; de même $a^2+ab-b^2$ ne peut valoir −1 dans ce cas puisqu'il serait positif. Dans tous les cas on a $a^2-b^2<0$.

3. a. $(y-x\ ; x)$ est une solution ssi $(x\ ; y)$ est une solution :

$$\left((y-x)^2+(y-x)x-x^2\right)^2=\left(y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2\right)^2=\left(y^2-xy+x^2\right)^2=1\ ;$$

Même calcul pour $(y\ ; y+x)$.

b. (2 ; 3) est solution donc $(3-2\ ; 2)=(1\ ; 2)$ et $(3\ ; 3+2)=(3\ ; 5)$ en sont ; (5 ; 8) est solution donc $(8-5\ ; 5)=(3\ ; 5)$ et $(8\ ; 5+8)=(8\ ; 13)$ en sont ; on a les nouvelles solutions : $(1\ ; 2)$, $(3\ ; 5)$ et $(8\ ; 13)$.

4. $a_0=a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Démonstration par récurrence : supposons que $(a_n\ ; a_{n+1})$ est solution, alors $(y\ ; y+x)=(a_{n+1}\ ; a_n+a_{n+1})=(a_{n+1}\ ; a_{n+2})$ est solution d'après le 3. a. Comme c'est vrai au rang 0 : (1 ; 1) est solution, c'est toujours vrai.

La question 1. b. justifie alors que les nombres $a_n$ et $a_{n+1}$ sont premiers entre eux.

Remarque : ce n'est pas la façon la plus rapide de montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux : soient $u_{n+1}$ et $u_n$ deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Alors $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ; soit $d$ un diviseur commun positif de $u_{n+1}$ et $u_n$ ; alors $d$ divise $u_{n-1}$, donc $d$ est un diviseur commun de $u_n$ et $u_{n-1}$.

En itérant (et en descendant), il vient : $d$ est un diviseur commun de $u_1=1$ et $u_0=1$ donc $d=1$ et $u_{n+1}$ et $u_n$ sont premiers entre eux.

### *30. Antilles, sept 2004*

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.
2. Si $p$ et $q$ sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par $2^p-1$ et par $2^q-1$.
3. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $2^n-1$ n'est jamais divisible par 9.
4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation : $24x+35y=9$ est l'ensemble des couples : $(-144+70k\ ; 99-24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note $f$ l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
6. Soit $s$ la similitude d'écriture complexe $z'=iz+(1-i)$, l'ensemble des points invariants de $s$ est une droite.

### *31. Asie, juin 2004*

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où $a$ est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9+1^2$ ; $13= 9+2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue $a$ : $a^2 +9 = 2^n$ où $a\in \mathbb{N}, n\in \mathbb{N}, n\geq 4$ .

a. Montrer que si $a$ existe, $a$ est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue $a$ : $a^2 +9 = 3^n$ où $a\in \mathbb{N}, n\in \mathbb{N}, n\geq 3$ .

a. Montrer que si $n\geq 3$ , $3^n$ est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si $a$ existe, il est pair et en déduire que nécessairement $n$ est pair.

c. On pose $n = 2p$ où $p$ est un entier naturel, $p\geq 2$ . Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue $a$ : $a^2 +9 = 5^n$ où $a\in \mathbb{N}, n\in \mathbb{N}, n\geq 2$ .

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si $n$ est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de 2. c. démontrer qu'il existe un unique entier naturel $a$ tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

### *32. Centres étrangers, juin 2004*

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers ?* »

Pour tout entier naturel $p\geq 2$ , on pose $N_p = 1...1$ où 1 apparaît $p$ fois.

On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1}+10^{p-2}+...+10^0$ .

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

2. Prouver que $N_p = \dfrac{10^p -1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p -1$ est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si $p$ n'est pas premier, alors $N_p$ n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel $x$ et tout entier naturel $n$ non nul,

$$x^n -1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1)$$

a. On suppose que $p$ est pair et on pose $p = 2q$, où $q$ est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que $N_p$ est divisible par $N_2 = 11$.

b. On suppose que $p$ est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où $q$ est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que $N_p$ est divisible par $N_3 = 111$.

c. On suppose $p$ non premier et on pose $p = kq$ où $k$ et $q$ sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que $N_p$ est divisible par $N_k$ .

4. Énoncer une condition nécessaire pour que $N_p$ soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

### *33. National, juin 2004 (c)*

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul $k$ et pour tout entier naturel $x$ :

$$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k -1 \ .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier $a$ supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit $n$ un entier naturel non nul et $d$ un diviseur positif de $n$ : $n = dk$. Montrer que $a^d -1$ est un diviseur de $a^n -1$.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} -1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels non nuls et $d$ leur PGCD.

a. On définit $m'$ et $n'$ par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à $m'$ et $n'$, montrer qu'il existe des entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $mu - nv = d$.

b. On suppose $u$ et $v$ strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d = a^d - 1$. Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

**Correction**

1. On redémontre le théorème sur la somme des termes d'une suite géométrique : on développe $(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = (x+x^2+\ldots+x^k)-(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = x^k - 1$ .

2. a. $n = dk$. Remplaçons $x$ par $a^d$ dans la relation précédente :

$$(a^d-1)(1+a^d+a^{2d}+\ldots+a^{d(k-1)}) = a^{dk}-1 = a^n - 1 .$$

$a^d - 1$ est en facteur dans $a^n - 1$, c'en est bien un diviseur.

b. On effectue la décomposition en facteurs premiers de 2004 : $2004 = 2^2.3.167$ donc $2^{2004}-1$ est divisible par $2^2-1=3, 2^3-1=7, 2^4-1=15, 2^6-1=63, 2^{12}-1=4095, \ldots$ $2^{2004}-1$ est donc divisible par 7 et 63 ; comme 9 divise 63 il divise également $2^{2004}-1$.

3. a. Bézout dit : $m'$ et $n'$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe $u$ et $v$ tels que $um'+vn'=1$ (ou $um'-vn'=1$). On multiplie tout par $d$ : $udm'+vdn'=d$, soit $um+vn=d$ (ou $um-vn=d$).

b. Développons :

$$a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d = a^d-1 \Leftrightarrow a^{mu}-a^{nv+d}=0 \Leftrightarrow a^{mu}=a^{nv+d} \Leftrightarrow mu = nv+d \Leftrightarrow mu-nv=d .$$

Divisons la relation $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d = a^d-1$ par $D = a^d - 1$ : $(\frac{a^{mu}-1}{a^d-1})-(\frac{a^{nv}-1}{a^d-1})a^d = 1$ ; ceci montre qu'il existe deux entiers tels que $1.A - a^d.B = D$ où $A = \frac{a^{mu}-1}{a^d-1}$ et $B = \frac{a^{nv}-1}{a^d-1}$. $A$ et $B$ sont donc premiers entre eux et $D$ est le PGCD de $A$ et $B$.

c. Le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$ est obtenu en passant par le PGCD de 63 et 60 qui est $d = 3$. On a alors $1.63-1.60=3$ d'où en prenant $a = 2$ : $A = 2^{63}-1$, $B = 2^{60}-1$ et $D = 2^3-1=7$.

***34. La Réunion, juin 2004***

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Soit $p$ un nombre premier et $a$ un entier naturel premier avec $p$ ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par $p$ ».

1. Soit $p$ un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel $k$, non nul, tel que $2^k \equiv 1(p)$.

b. Soit $k$ un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1(p)$ et soit $n$ un entier naturel.Montrer que, si $k$ divise $n$, alors $2^n \equiv 1(p)$.

c. Soit $b$ tel que $2^b \equiv 1(p)$, $b$ étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de $n$ par $b$, que si $2^n \equiv 1(p)$, alors $b$ divise $n$.

2. Soit $q$ un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$. On prend pour $p$ un facteur premier de $A$.

a. Justifier que : $2^q \equiv 1(p)$.

b. Montrer que $p$ est impair.

c. Soit $b$ tel que $2^b \equiv 1(p)$, $b$ étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant 1. que $b$ divise $q$. En déduire que $b = q$.

d. Montrer que $q$ divise $p-1$, puis montrer que $p \equiv 1(2q)$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec $m$ entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que $A_1$ est premier.

### *35. Nouvelle Calédonie, sept 2003*

1. a. Soit $p$ un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres $p$, $p+10$ et $p+20$, et l'un seulement est divisible par 3.

b. Les entiers naturels $a$, $b$ et $c$ sont dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs $(u, v, w)$ tels que $3u + 13v + 23w = 0$.

a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w (\text{mod } 3)$.

b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où $k$, $k'$ et $r$ sont des entiers relatifs et $0 \le r \le 2$. Montrer que les éléments de E sont de la forme : $(-13k - 23k' - 12r, 3k + r, 3k' + r)$.

c. l'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine$O$ et soit P le plan d'équation $3x + 13y + 23z = 0$.

Déterminer l'ensemble des points $M$ à coordonnées $(x, y, z)$ entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

### *36. Antilles-Guyane, sept 2003*

Soit l'équation (**1**) d'inconnue rationnelle $x$ : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où $u$ et $v$ sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'´equation (**1**).

a. Prouver que les entiers relatifs $u$ et $v$ sont liés par la relation $14u + 39v = 1\,129$.

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$. Vérifier que le couple $(-25\ ;\ 9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0\ ;\ v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\,129$. Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u\ ;\ v)$ précédents, celui pour lequel le nombre $u$ est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers. En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\dfrac{p}{q}$ une solution rationnelle de l'équation (**1**) d'inconnue $x$ : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où $u$ et $v$ sont des entiers relatifs. Montrer que si $p$ et $q$ sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors $p$ divise 14 et $q$ divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (**1**) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

### *37. France, sept 2003*

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que : $123u + 2003v = 1$.

b. En déduire un entier relatif $k_0$ tel que : $123k_0 \equiv 1[2003]$.

c. Montrer que, pour tout entier relatif $x$, $123x \equiv 456[2003]$ si et seulement si $x \equiv 456k_0[2003]$.

d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs $x$ tels que : $123x \equiv 456[2003]$.

e. Montrer qu'il existe un unique entier $n$ tel que : $1 \le n \le 2002$ et $123n \equiv 456[2003]$.

2. Soit $a$ un entier tel que : $1 \leq a \leq 2002$.

a. Déterminer PGCD($a$ ; 2003). En déduire qu'il existe un entier $m$ tel que : $am \equiv 1[2003]$.

b. Montrer que, pour tout entier $b$, il existe un unique entier $x$ tel que : $1 \leq x \leq 2002$ et $ax \equiv b[2003]$.

### *38. Polynésie, sept 2003*

On désigne par $p$ un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que $p$ est congru à $-1$ ou à 1 modulo 3. En déduire que $n$ est divisible par 3.

2. En remarquant que $p$ est impair, prouver qu'il existe un entier naturel $k$ tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, puis que $n$ est divisible par 16.

3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de $p$ par 5, démontrer que 5 divise $n$.

4. a. Soient $a$, $b$ et $c$ trois entiers naturels. Démontrer que si $a$ divise $c$ et $b$ divise $c$, avec $a$ et $b$ premiers entre eux, alors $ab$ divise $c$.

b. Déduire de ce qui précède que 240 divise $n$.

5. Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier

$$A = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4$$

soit un nombre premier ?

### *39. Antilles-Guyane, juin 2003*

1. a. Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit $n$ un entier naturel non nul. On note $a$ et $b$ les entiers naturels tels que : $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

a. Que valent $a_1$ et $b_1$ ? D'après les calculs de la question 1. a., donner d'autres valeurs de $a_n$ et $b_n$.

b. Calculer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$.

c. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$. En déduire que, quel que soit $n$ entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

d. Démontrer que, si $a_n$ et $b_n$ sont premiers entre eux, alors $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ sont premiers entre eux. En déduire que, quel que soit $n$ entier naturel non nul, $a_n$ et $b_n$ sont premiers entre eux.

### *40. Asie, juin 2003*

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls $a$, $b$ et $c$, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(bc - a\,;\,b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n\,;\,n + 3) = \text{PGCD}(48\,;\,n + 3).$$

4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels $n$ tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

### *41. Liban, mai 2003*

Les suites d'entiers naturels $(x_n)$ et $(y_n)$ sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3, x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1, y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2. a. Calculer le PGCD de $x^8$ et $x^9$, puis celui de $x^{2002}$ et $x^{2003}$. Que peut-on en déduire pour $x^8$ et $x^9$ d'une part, pour $x^{2002}$ et $x^{2003}$ d'autre part ?

b. $x_n$ et $x_{n+1}$ sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel $n$ ?

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $2x_n - y_n = 5$.

b. Exprimer $y_n$ en fonction de $n$.

c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel $p$ le reste de la division euclidienne de $2^p$ par 5.

d. On note $d_n$ le PGCD de $x_n$ et $y_n$ pour tout entier naturel $n$. Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$ ; en déduire l'ensemble des entiers naturels $n$ tels que $x_n$ et $y_n$ soient premiers entre eux.

### *42. Amérique du Sud, décembre 2002*

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111\ .\ .\ .\ 11$ (l'écriture décimale de $a_n$ est composée de $n$ chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant $a_n$ sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

2. On considère la division euclidienne par 2001 : expliquer pourquoi parmi les 2002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

Soit $a_n$ et $a_p$ deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$). Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001 ?

3. Soit $k$ et $m$ deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.

Démontrer l'égalité : $a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$.

4. Calculer le PGCD de 2001 et de 10. Montrer que si 2001 divise $a_m - a_k$, alors 2001 divise $a_{m-k}$.

5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

### *43. Nouvelle-Calédonie, novembre 2002*

On considère deux entiers naturels, non nuls, $x$ et $y$ premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. a. Démontrer que $x$ et $S$ sont premiers entre eux, de même que $y$ et $S$.

b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.

c. Démontrer que les nombres $S$ et $P$ sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3. Trouver les nombres premiers entre eux $x$ et $y$ tels que : $SP = 84$.

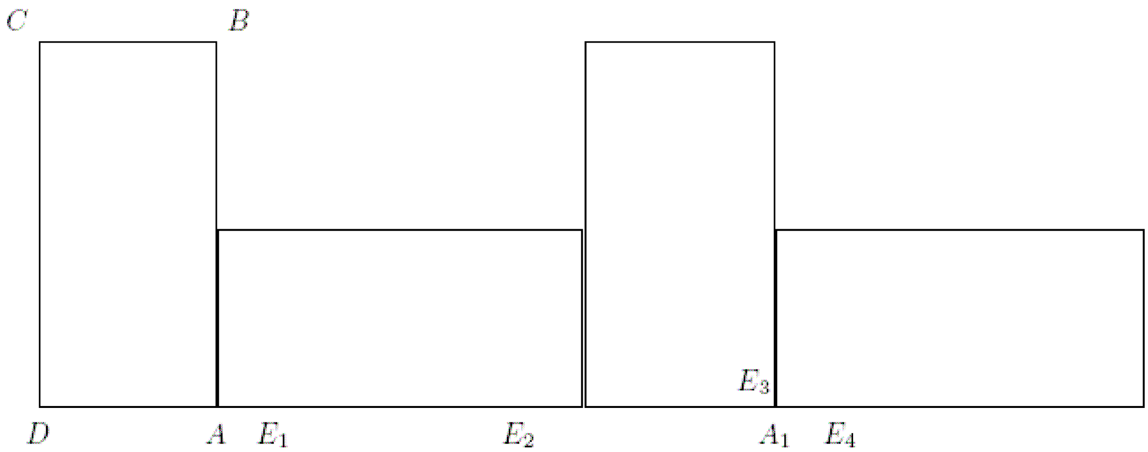
4. Déterminer les deux entiers naturels $a$ et $b$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ avec } d = \text{PGCD}(a\ ;\ b)$$

(on pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec $x$ et $y$ premiers entre eux).

### *44. France, septembre 2002*

On considère un rectangle direct $ABCD$ vérifiant : $AB = 10$ cm et $AD = 5$ cm.




1. Faire une figure : construire $ABCD$, puis les images respectives $M$, $N$ et $P$ de $B$, $C$ et $D$ par la rotation $r$ de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. a. Construire le centre $\Omega$ de la rotation $r'$ qui vérifie $r'(A) = N$ et $r'(B) = P$. Déterminer l'angle de $r'$.

b. Montrer que l'image de $ABCD$ par $r'$ est $AMNP$.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3. On considère les images successives des rectangles $ABCD$ et $AMNP$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DM}$.

Sur la demi-droite $[DA)$, on définit ainsi la suite de points $(A_k)$, $k > 1$, vérifiant, en cm, $DA_k = 5 + 15k$.

Sur la même demi-droite, on considère la suite de points $(E_n)$, $n > 1$, vérifiant, en cm, $DE_n = 6,55n$.

a. Déterminer l'entier $k$ tel que $E_{120}$ appartienne à $[A_k, A_{k+1}]$. Que vaut la longueur $A_kE_{120}$ en cm ?

b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale $n_0$ le point $E_{n_0}$ est confondu avec un point $A_k$.

Montrer que si un point $E_n$ est confondu avec un point $A_k$ alors $131n - 300k = 100$.

Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.

Déterminer la valeur minimale $n_0$ recherchée.

### *45. Asie, juin 2002*

On considère les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer, par récurrence, que les points $M_n$ de coordonnées $(x_n ; y_n)$ sont sur la droite $(\Delta)$ dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2. Montrer, par récurrence, que tous les $x_n$ sont des entiers naturels. En déduire que tous les $y_n$ sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :

a. $x_n$ est divisible par 3 si et seulement si $y_n$ est divisible par 3.

b. Si $x_n$ et $y_n$ ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. a. Montrer, par récurrence, que $x_n = \frac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.

b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel $n$.

### *46. Centres étrangers, juin 2002*

Soit $p$ un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples ($x$ ; $y$) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$(\mathrm{E}) : x^2+y^2=p^2.$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.

On suppose désormais que $p$ est différent de 2 et que le couple ($x$ ; $y$) est solution de l'équation (E).

2. Le but de cette question est de prouver que $x$ et y sont premiers entre eux.

a. Montrer que $x$ et $y$ sont de parités différentes.

b. Montrer que $x$ et $y$ ne sont pas divisibles par $p$.

c. En d éduire que $x$ et $y$ sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que $p$ est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p=u^2+v^2$ où $u$ et $v$ sont deux entiers naturels strictement positifs.

a. Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2-v^2\right|;2uv\right)$ est solution de l'´equation (E).

b. Donner une solution de l'équation (E), lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque $p$ n'est pas somme de deux carrés.

a. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?

b. Démontrer que les équations $x^2+y^2=9$ et $x^2+y^2=49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

### *47. France, juin 2002*

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs ($u$ ; $v$) tel que $6u + 7v = 1$ ; en déduire une solution particulière ($x_0$ ; $y_0$) de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan $(O;\vec{i},\vec{j})$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point $M$ du plan (P) dont les coordonnées $x$, $y$ et $z$ sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier $y$ est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où $p$ est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où $q$ est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels $x$, $p$ et $q$ vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$.

En déduire que $q$ prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

### *48. Polynésie, juin 2002*

$n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que $n$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha=n+3$ et $\beta=2n+1$ et on note $\delta$ le PGCD de $\alpha$ et $\beta$.

a. Calculer $2\alpha-\beta$ et en déduire les valeurs possibles de $\delta$.

b. Démontrer que $\alpha$ et $\beta$ sont multiples de 5 si et seulement si ($n - 2$) est multiple de 5.

3. On considère les nombres $a$ et $b$ définis par : $\begin{cases} a = n^3 + 2n^2 - 3n \\ b = 2n^2 - n - 1 \end{cases}$.

Montrer, après factorisation, que $a$ et $b$ sont des entiers naturels divisibles par ($n - 1$).

4. a. On note $d$ le PGCD de $n(n + 3)$ et de ($2n + 1$). Montrer que $\delta$ divise $d$, puis que $\delta = d$.

b. En déduire le PGCD, $\Delta$, de $a$ et $b$ en fonction de $n$.

c. Application : Déterminer $\Delta$ pour $n = 2\,001$ ; déterminer $\Delta$ pour $n = 2\,002$.

## *49. Amérique du Nord, mai 2002*

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme *abba* où $a$ est un chiffre supérieur ou égal à 2 et $b$ est un chiffre quelconque. Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. a. Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.

b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.

2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?

b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?

3. Soit $n$ un élément de (E) s'écrivant sous la forme *abba*.

a. Montrer que : « $n$ est divisible par 3 » équivaut à « $a + b$ est divisible par 3 ».

b. Montrer que : « $n$ est divisible par 7 » équivaut à « $b$ est divisible par 7 ».

4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Etude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile. On admet que pour tout élément $n$ de (F), il existe des entiers naturels $p$ et $q$ tels que :

$$n = 2000 + 4p \text{ et } n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l' équation (e) : $4p - 11q = 2$ où $p$ et $q$ sont des entiers relatifs.

Vérifier que le couple (6 ; 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).

2. En déduire que tout entier $n$ de (F) peut s' écrire sous la forme $2024 + 44k$ où $k$ est un entier relatif.

3. A l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).

N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

## *50. Nouvelle Calédonie, décembre 2001*

**Partie I**

Soit $x$ un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2$.

2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

**Partie II**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et $d$ leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2. Montrer que, tout diviseur de $A$ qui divise $n$, divise 2.

3. Montrer que, tout diviseur commun de $A$ et $B$, divise $4n$.

4. Dans cette question on suppose que $n$ est impair.

a. Montrer que $A$ et $B$ sont impairs. En déduire que $d$ est impair.

b. Montrer que $d$ divise $n$.

c. En déduire que $d$ divise 2, puis que $A$ et $B$ sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que $n$ est pair.

a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

b. Montrer que $d$ est de la forme $d = 2p$, où $p$ est impair.

c. Montrer que $p$ divise $n$. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)

## *51. Antilles, septembre 2001*

1. Soient $a$ et $b$ des entiers naturels non nuls tels que PGCD($a + b$ ; $ab$) = $p$, où $p$ est un nombre premier.

a. Démontrer que $p$ divise $a^2$. (On remarquera que $a^2 = a(a + b) - ab$).

b. En déduire que $p$ divise $a$.

On constate donc, demême, que $p$ divise $b$.

c. Démontrer que PGCD($a$ ; $b$) = $p$.

2. On désigne par $a$ et $b$ des entiers naturels tels que $a \leq b$ .

a. Résoudre le système $\begin{cases} \text{PGCD}(a\,;b) = 5 \\ \text{PPCM}(a\,;b) = 170 \end{cases}$.

b. En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \text{PGCD}(a+b\,;ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a\,;b) = 170 \end{cases}$.

## *52. Amérique du Sud, septembre 2001*

*4 points*

Soit $n$ un entier naturel non nul.

On considère les nombres $a$ et $b$ tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \text{ et } b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise $a$ et $b$.

2. Un élève affirme que le PGCD de $a$ et $b$ est $2n + 1$. Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

## *53. France, juin 2001*

*5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation $f$ du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M_0$ d'affixe $z_0$ définie par $z_0 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et on définit une suite de points $(M_n)$ de la manière suivante :

$M_0$ a pour afflxe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel $n$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle $z_n$ l'affixe de $M_n$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f$. Placer les points $M_0$, $M_1$, $M_2$.

2. Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a l'égalité $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{6}\right)}$ (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers $n$ et $p$ tels que $n$ soit supérieur ou égal à $p$. Montrer que deux points $M_n$ et $M_p$ sont confondus si, et seulement si, $(n - p)$ est multiple de 12.

4. a. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple (4 ; 9) est solution, résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels $n$ tels que $M_n$ appartienne à la demi-droite [O$x$).

## *54. Centres étrangers, juin 2001*

*5 points*

Un astronome a observé au jour $J_0$ le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle $J_1$ le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour $J_1$.

1. Soient $u$ et $v$ le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre $J_0$ et $J_1$. Montrer que le couple $(u\ ;\ v)$ est solution de l'équation $(E_1)$ : $35x - 27y = 2$.

2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E2) : $35x - 27y = 1$.

b. En déduire une solution particulière $(u_0\ ;\ v_0)$ de $(E_1)$.

c. Déterminer toutes les solutions de l'équation $(E_1)$.

d. Déterminer la solution $(u\ ;\ v)$ permettant de déterminer $J_1$.

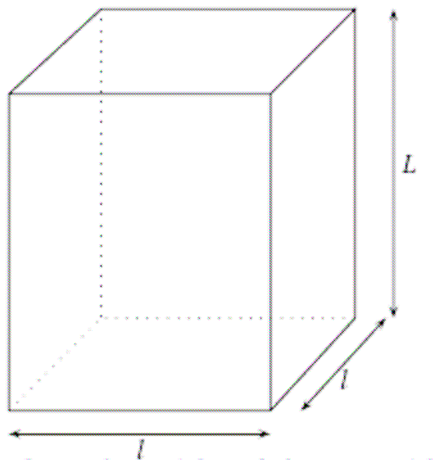
3. a. Combien de jours s'écouleront entre $J_0$ et $J_1$ ?

b. Le jour $J_0$ était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour $J_1$ ? (L'année 2000 était bissextile.)

c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

## *55. Antilles, juin 2001*

*5 points*




1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur $L$, à base carrée de côté $l$, où $l$ et $L$ sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête $a$ est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour $a$ ? Quelles sont les valeurs possibles pour $a$ ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de $a$ est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête $c$ est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête $c$ pour la caisse C ? Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête $c$ ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions $l$ et $L$ de la boîte B ?

### *56. Amérique du Nord, juin 2001*

*4 points*

1. Montrer que, pour tout entier relatif $n$, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

a. Vérifier, en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0\,;\,y_0)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c. *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Indication :On remarquera que le point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x\,;\,y)$ vérifie l'équation (E).

### *57. Pondichéry, juin 2001*

*4 points*

1. On considère l'équation (1) d'inconnue $(n, m)$ élément de $\mathbb{Z}^2$ : $11n - 24m = 1$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. $(n, m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$ (on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0)$, valable pour tout entier naturel $n$ non nul).

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers $N$ et $M$ tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

### *58. N. Calédonie, juin 2001*

*5 points*

Dans tout l'exercice $x$ et $y$ désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$. S est l'ensemble des couples $(x, y)$ tels que $\text{PGCD}(x, y) = y - x$.

1. a. Calculer le PGCD(363, 484).

b. Le couple (363, 484) appartient-il à S ?

2. Soit $n$ un entier naturel non nul ; le couple $(n, n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que $(x, y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel $k$ non nul tel que

$$x = k(y - x) \text{ et } y = (k+1)(y - x).$$

b. En déduire que pour tout couple $(x, y)$ de S on a : $\text{PPCM}(x, y) = k(k+1)(y - x)$.

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples $(x, y)$ de S tels que $\text{PPCM}(x, y) = 228$.

## *59. Polynésie, juin 2001*

*4 points*

1. On considère $x$ et $y$ des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$.

a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.

c. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 32n - 1$, où $n$ est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).

3. On considère l'équation (E'') $A_3 x + A_2 y = 3296$.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x, y)$ solutions de l'équation (E'').

b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

## *60. Liban, mai 2000 (c)*

*5 points*

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Soit $A$ et $B$ dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ ; $b = -4 - i$.

Soit $f$ la transformation du plan (P) qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

a. Exprimer $z'$ en fonction de $z$.

b. Montrer que $f$ admet un seul point invariant $\Omega$ dont on donnera l'affixe. En déduire que $f$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées $x$ et $y$ de $M$ sont des entiers naturels avec $1 \le x \le 8$ et $1 \le y \le 8$.

Les coordonnées $(x'\,;y')$ de $M'$ sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.

a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par $x'$ et $y'$. Écrire la liste des éléments de G et H.

b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.

c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x'\,;y')$ de G× H tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?

e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est unmultiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x'\,;y')$ qui conviennent.

En déduire les couples $(x\,;y)$ correspondant aux couples $(x'\,;y')$ trouvés.

**Correction**

1. a. $z' = 2(z-a) + (z-b) = 3z - 2a - b = 3z - 6 - i$.

b. $z = 3z + 2 - i \Leftrightarrow 2z = -2 + i \Leftrightarrow z = -1 + \frac{1}{2}i$. On a $\overrightarrow{\Omega M'} = 3\overrightarrow{\Omega M}$ donc $f$ est une homothétie de centre $\Omega$ et de rapport 3.

2. $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$, et $1 \le y \le 8$.

a. $1 \le x \le 8$ donc $3\times 1 + 2 \le x' \le 3\times 8 + 2 \Leftrightarrow 5 \le x' \le 26$

et $1 \le y \le 8$ donc $3\times 1 - 1 \le y' \le 3\times 8 - 1 \Leftrightarrow 2 \le y' \le 23$.

b. $x' - y' = 3x + 2 - 3y + 1 = 3x - 3y + 3 = 3(x - y + 1)$.

c. Si on prend deux entiers pairs ou impairs, la somme est paire, la différence également ; si on prend deux entiers de parité différente, la somme est impaire, la différence également.

d. $m = x'^2 - y'^2 = 60k \Leftrightarrow (x'-y')(x'+y') = 60k$ ; $x'+y' = 3x+2+3y-1 = 3x+3y+1 = 3(x+y)+1$.

Si $x'$ et $y'$ sont de parité différente, $x'-y'$ et $x'+y'$ sont impairs et leur produit également ; ce ne peut être un multiple de 60. Donc $x'$ et $y'$ sont de parité identique ; comme $x'-y'$ est un multiple de 3 et pair, c'est un multiple de 6.

Si le nombre $x' - y'$ est un multiple de 30, $x-y+1$ est un multiple de 10, or $x$ et $y$ sont plus petits que 8, c'est impossible.

e. Comme $x'-y'$ est un multiple de 6 et pas de 30, $x'-y'$ n'est pas divisible par 5 ; pour que $x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60, il faut donc que $x' + y'$ soit divisible par 5 ; comme il est pair, c'est un multiple de 10.

On a alors $\begin{cases} x'-y' = 6p \\ x'+y' = 10q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = 6p+10q \\ 2y' = 10q-6p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5q+3p \\ y' = 5q-3p \end{cases}$ avec $p$ = 1 ou 2 et $q$ = 1, 2, 3 ou 4, ce qui donne :

| $p$ | $q$ | $x'$ | $y'$ | $x'^2 - y'^2$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 | 2 | 60 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 13 | 7 | 120 | 11/3 | 8/3 |
| 1 | 3 | 18 | 12 | 180 | 16/3 | 13/3 |
| 1 | 4 | 23 | 17 | 240 | 7 | 6 |
| | | | | | | |
| 2 | 1 | 11 | −1 | 120 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 16 | 4 | 240 | 14/3 | 5/3 |
| 2 | 3 | 21 | 9 | 360 | 19/3 | 10/3 |
| 2 | 4 | 26 | 14 | 480 | 8 | 5 |

et donc les solutions en $x$ et $y$ : $(2;1), (7;6), (8;5)$. On pouvait le faire rapidement avec Excel…

| | $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y'$ | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 |
| $x$ | $x'$ | | | | | | | | |
| 1 | 5 | 21 | 0 | -39 | -96 | -171 | -264 | -375 | -504 |
| 2 | 8 | 60 | 39 | 0 | -57 | -132 | -225 | -336 | -465 |
| 3 | 11 | 117 | 96 | 57 | 0 | -75 | -168 | -279 | -408 |
| 4 | 14 | 192 | 171 | 132 | 75 | 0 | -93 | -204 | -333 |
| 5 | 17 | 285 | 264 | 225 | 168 | 93 | 0 | -111 | -240 |
| 6 | 20 | 396 | 375 | 336 | 279 | 204 | 111 | 0 | -129 |
| 7 | 23 | 525 | 504 | 465 | 408 | 333 | 240 | 129 | 0 |
| 8 | 26 | 672 | 651 | 612 | 555 | 480 | 387 | 276 | 147 |

## *61. Pondichéry, mai 1999 (c)*

*4 points*

**Partie A**

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples ($a$ ; $b$) d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

**Partie B**

On considère l'équation (E) d'inconnue $n$ appartenant à $\mathbb{N}$ :

$$(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où $S$ est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de $S$ telles que ($E$) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier $S$ tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.

2. Peut-on déterminer un entier $S$ tel que 5 soit solution de (E) ?

3. Montrer que tout entier $n$ solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de $S$ telles que (E) admette deux solutions entières.

**Partie C**

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé.

La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

**<u>Correction</u>**

**Partie A**

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples ($a$ ; $b$) d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

On pose $\begin{cases} a = kd \\ b = kd' \end{cases}$ où $d$ est le PGCD de $a$ et $b$ : $a+b = dk + dk' = d(k+k') = 1999(k+k') = 11994 \Rightarrow k+k' = 6$.

Les valeurs possibles de $k$ et $k'$ et celles de $a$ et $b$ sont donc :

| $k$ | $k'$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 6 | 0 | 11994 |
| 1 | 5 | 1999 | 9995 |
| 2 | 4 | 3998 | 7996 |
| 3 | 3 | 5997 | 5997 |
| 4 | 2 | 7996 | 3998 |
| 5 | 1 | 9995 | 1999 |
| 6 | 0 | 11994 | 0 |

**Partie B**

On considère l'équation (E) d'inconnue $n$ appartenant à $\mathbb{N}$ :

$$(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où $S$ est un entier naturel.

1. 3 est solution de (E) ssi $9 - 3S + 11994 = 0 \Leftrightarrow S = 4001$ ; la deuxième solution est alors $4001 - 3 = 3008$.

2. 5 est solution de (E) ssi $25 - 5S + 11994 = 0 \Leftrightarrow 5S = 12019$, $S$ n'est pas entier, ça ne colle pas.

3. (E) peut s'écrire également $11994 = Sn - n^2 = n(S-n)$ donc $n$ divise 11994.

Comme $11994 = 6 \times 1999 = 2 \times 3 \times 1999$, n peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 6, 1999, 3998, 5997 et 11994 d'où S peut prendre les valeurs 2005, 4001, 5999 et 11995.

| $n$ | $S - n$ | $S$ |
| --- | --- | --- |
| 1 | 11994 | 11995 |
| 2 | 5997 | 5999 |
| 3 | 3998 | 4001 |
| 6 | 1999 | 2005 |
| 1999 | 6 | 2005 |
| 3998 | 3 | 4001 |
| 5997 | 2 | 5999 |
| 11994 | 1 | 11995 |

**Partie C**

Evident… inutile de dépasser $\sqrt{1999} \approx 44,7$ …

***62. Nombres de Farey et approximation d'un rationnel par un rationnel***

Définition

On dira que deux fractions irréductibles $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ sont **consécutives** si $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$ et s'il n'existe pas de fraction $\frac{a}{b}$ comprise dans l'intervalle ouvert $\left]\frac{m}{n};\frac{m'}{n'}\right[$ telle que $b$ soit inférieur au plus petit des deux dénominateurs $n$ et $n'$.

Théorème

**Deux fractions irréductibles $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ sont consécutives si et seulement si**

$$nm' - mn' = 1 \quad \textbf{(*)}$$

Démonstration

• Démontrer d'abord que si la relation (*) est vérifiée, alors les deux fractions sont effectivement consécutives (comparer $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}-\frac{m}{n}$, dans le cas où $b$ est inférieur à min($n$, $n'$)).

• Inversement, soit $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ deux fractions irréductibles ne vérifiant pas la condition(*). On suppose d'abord : $n \le n'$.

• Démontrer que l'équation $nx - my = 1$ a des solutions en nombres entiers, puis donner tous les couples d'entiers solutions à partir d'une solution $(x_0, y_0)$.

• Démontrer qu'un des couples ($m''$, $n''$) solution est tel que $1 \le n'' < n$.

• Conclure d'après la démonstration du sens direct que les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ ne sont pas consécutives.

• Procéder de façon similaire dans le cas $n' < n$, en considérant l'équation : $xm' - yn' = 1$.

Définition

Soit $N$ un entier naturel non nul.

On appelle **suite de Farey** d'ordre $N$ la suite finie des fractions irréductibles inférieures ou égales à 1, dont le dénominateur vaut au plus $N$, classées dans l'ordre croissant.

Exemple : la suite de Farey d'ordre 7 est : $\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$

Il est alors immédiat que deux termes successifs d'une suite de Farey : $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$, sont consécutifs au sens ci-dessus. Donc, d'après le Théorème : $nm' - mn' = 1$ (proposition 1).

Examinons maintenant comment une nouvelle fraction s'insère dans la précédente suite de Farey. Supposons que $\frac{m}{n}$ et $\frac{m''}{n''}$ soient consécutifs dans une suite de Farey, et que dans une suite de Farey postérieure on ait comme termes consécutifs : $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$. $(m', n')$ est une solution de $nx - my = 1$ ; $(m'', n'')$ est la solution suivante, donc $m'' = m + m'$, $n'' = n + n'$ (proposition 2).

Telle est la formule qui donne l'insertion d'une nouvelle fraction. Il faut donc rechercher les dénominateurs de fractions consécutives dont la somme est égale au nouvel ordre de Farey.
Par exemple, avant la suite de Farey d'ordre 7 ci-dessus, nous avions celle d'ordre 5 :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

Les fractions consécutives dont la somme des dénominateurs fait 7 sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$, entre lesquels va s'intercaler $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{2}$ qui vont donner naissance à $\frac{3}{7}$, etc.
On peut aussi montrer, plus généralement :
Si $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ sont trois termes successifs d'une suite de Farey, alors $\frac{m'}{n'} = \frac{m+m''}{n+n''}$.

Farey était un géologue britannique. Il introduisit en 1816 les suites qui portent son nom, en en énonçant les propriétés que nous venons de voir. Cauchy compléta ses preuves.
On peut aussi parler de l'approximation rationnelle d'un réel, par exemple sous l'aspect graphique, pour commencer. Les meilleures fractions approximantes sont les réduites de la fraction continuée. Le "Résultat" ci-dessus permet d'affirmer que deux réduites consécutives $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ vérifient l'équation : $nm' - mn' = 1$ ou $-1$.