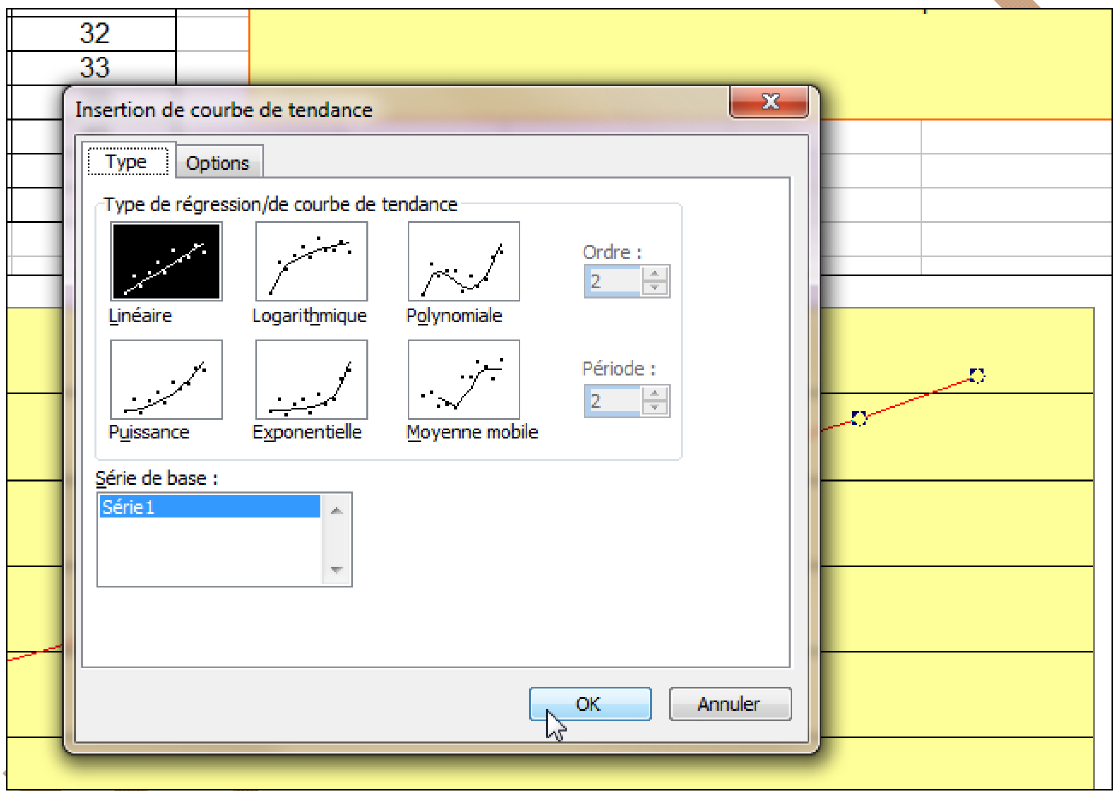
EN LETTRES CAPITALES NOM(S) :	PRÉNOM(S) :	GROUPE :

– Travaux pratiques de Mathématiques –

Ajustement



Etude d'un ajustement par la méthode des moindres carrés

ETUDE 1

On donne les valeurs d'un indice boursier au premier de chaque mois entre les mois de janvier et de juillet d'une année donnée.

Mois	janvier	février	mars	avril	mai	juin	juillet
Rang : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Indice : y_i	7100	6900	6800	6600	6500	6350	6400

ETUDE 2

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire en euros de 2007 à 2013 :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
SMIC horaire brut y_i	8,44	8,67	8,82	8,86	9,09	9,31	9,43

ETUDE 3

Une entreprise de Génie civil achète une machine-outil pour la réalisation de pièces d'assemblages destinées à la construction de charpentes métalliques. Cette machine coûte 10 000 euros à l'achat. Le tableau d'amortissement ci-dessous donne la valeur y en euros de cette machine après x années d'utilisation :

Année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur : y_i	8500	7230	6140	5220	4440	3770	3200	2720	2300	1970

On considère la série statistique $(x_i ; z_i)$ avec $z_i = \ln(y_i)$. Déterminer l'équation de la droite D de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

Travail demandé

Les questions concernent chacune des études ci-avant.

1] A l'aide d'un tableur, représenter le nuage de points puis déterminer l'équation de la droite d'ajustement linéaire.

2] Après consulté les rappels de cours ci-après, écrire un programme Scilab qui, après avoir demandé à l'utilisateur la liste des valeurs x_i et la liste des valeurs y_i, permet de calculer et d'afficher les coordonnées du point moyen G ainsi que l'équation de la droite de régression de y en x.

Remarques :

1. Pour saisir une liste de valeurs, il suffit d'utiliser la typographie suivante :
`x = [1,5,7,10,14]` permet de créer un vecteur ligne comportant 5 colonnes.
`x(1,4)` renvoie 10
`x(1,5)` renvoie 14
2. Créer des fonctions à l'aide de la commande « function ». Cela permet de simplifier l'écriture du programme principal.
3. Afficher 4 décimales pour les valeurs numériques calculées.

3] Appliquer votre programme aux valeurs du tableau ci-avant et déterminer l'équation de la droite. Comparer avec les résultats obtenus avec le tableur.

Droite de régression linéaire au sens des moindres carrés

Il s'agit de déterminer les réels a et b tels que l'écart quadratique moyen $EQ(a;b)$ soit minimal afin d'obtenir le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite, notée $D_{Y/X}$, la plus proche possible du nuage de points. Une telle droite est appelée droite de régression linéaire de Y en X au sens des moindres carrés.

• **Covariance**

La covariance de X et de Y est le nombre, noté $\text{cov}(X,Y)$, défini par la formule suivante :

$$\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)\left(y_i - \overline{Y}\right)\right) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i.y_i\right) - \overline{X}\times\overline{Y}$$

avec : $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$ et $\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_N}{N}$

• **Écart quadratique moyen minimal**

Les valeurs de a et b telles que l'écart quadratique moyen $EQ(a;b)$ soit minimal ont les expressions suivantes :

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{Var(X)}$$

avec $\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i.y_i\right) - \overline{X}\times\overline{Y}$ et $Var(X) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \overline{X}^2$

Le point moyen appartient à la droite $D_{Y/X}$, on en déduit la valeur de b :

$$b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

• **Remarque**

La droite de régression linéaire de Y en X au sens des moindres carrés passe toujours par le point moyen du nuage $G\left(\overline{X};\overline{Y}\right)$.

Coefficient de détermination – Coefficient de corrélation

On note $EQ_{\min}$ la valeur minimale de l'écart quadratique moyen $EQ(a;b)$ pour les valeurs suivantes de a et de b :

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{Var(X)} \quad \text{et} \quad b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

Pour ces valeurs de a et de b, la valeur minimale $EQ_{\min}$ de l'écart quadratique moyen a l'expression suivante :

$$EQ_{\min} = Var(Y)\times\left(1 - r^2\right)$$

avec $r^2 = \frac{\text{cov}^2(X,Y)}{Var(X)\times Var(Y)}$ et $Var(Y) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2\right) - \overline{Y}^2$

• **Coefficient de détermination**

Le coefficient r^2 est appelé coefficient de détermination. On a les inégalités suivantes :

$$0 \le r^2 \le 1 \quad \text{et} \quad 0 \le EQ_{\min} \le Var(Y)$$

• Remarques

1. Si la valeur de r^2 est proche de 1 alors la valeur de $EQ_{\min}$ est proche de 0. Dans ce cas, les points du nuage sont tous très proches de la droite $D_{Y/X}$.

2. Si la valeur de r^2 est proche de 0 alors la valeur de $EQ_{\min}$ est élevée comparativement à la variance de Y. Dans ce cas, on considère que la dispersion des valeurs y_i (dispersion mesurée par la variance de Y) n'est pas directement liée à la dispersion des valeurs x_i. Il semble alors peu probable que Y dépende linéairement de X.

3. En général, on conclue en faveur d'une dépendance linéaire de Y par rapport à X lorsque le coefficient de détermination r^2 est supérieur ou égal à 0.80. Dans le cas contraire, on rejette l'hypothèse d'une dépendance linéaire.

• Coefficient de corrélation

Le coefficient r est appelé coefficient de corrélation de Y et de X :

$$r = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{s(X)\times s(Y)} \text{ et } -1 \le r \le 1$$

avec $s(X) = \sqrt{Var(X)}$ et $s(Y) = \sqrt{Var(Y)}$

La valeur de r est du signe du coefficient directeur a de la droite de régression linéaire $D_{Y/X}$.

Les fonctions et structures

➔ Structure répétitive

Pour k **de** 1 **jusqu'à** n **Faire**
{Traitement 1}
FinPour

➔ Structure alternative

Si {condition} **Alors**
{Traitement 1}
Sinon
{Traitement 2}
FinSi

➔ rand()

La fonction rand() permet de générer un nombre aléatoire strictement compris entre 0 et 1. La loi sélectionnée par défaut est la loi uniforme.

➔ modulo(a , m)

Renvoie le reste de la division euclidienne de a par m.
Exemple :
x = modulo(23 , 4) ; x contient la valeur 3 car 23 = 4*5 + 3
y = modulo(5 , 2) ; y contient la valeur 1
z = modulo(8 , 2) ; z contient la valeur 0

➔ t = zeros(1 , 100)

La fonction zeros(n , p) définit une matrice de n lignes et de p colonnes dont tous les termes sont nuls.
La fonction zeros(1 , 100) définit un vecteur ligne de 100 colonnes dont tous les termes sont nuls.
t(1 , 2) = 6 place la valeur 6 dans la deuxième colonne du vecteur ligne t.

➔ disp(t)

disp(t) : Affiche les éléments d'un vecteur ligne (ou d'une matrice ou d'une variable).

➔ Affichage de plusieurs variables

```
printf ("Encadrement : %f%s%f\n",a," < xsol < ",b);
```

L'affichage est le suivant : Encadrement : 3.412 < xsol < 3.413

La chaîne de caractères "%s%f%\n" est appelée chaîne de formatage :
%s : affichage d'une chaîne de caractères (string).
%i : affichage d'un nombre entier (integer).
%f : affichage d'un nombre réel (float).
\n : Effectue un retour à la ligne après l'affichage.
%0.8f : Force l'affichage du réel avec 8 décimales.

➔ function

L'instruction « function » permet de définir une fonction utilisateur.

```
function z = f(x)
z = x^2 + x + 2
endfunction
```

f(1) renvoie 4

➔ int

La fonction int() renvoie la troncature à l'unité d'un nombre.
int(3.5) renvoie 3

➔ return
L'instruction return permet de sortir d'une fonction et de retourner à l'endroit de l'appel.

➔ break
L'instruction break permet de sortir d'une boucle for (interruption d'une boucle).

➔ length(a)
length(a) revoie le nombre d'élément d'un vecteur ou d'une matrice.

➔ sum
Soit a = [5,8]
a(1,1) a pour valeur 5 et (1,2) a pour valeur 8.

s = sum(a) ; s est un reel et s = 13.
n = a.^2 ; n est un vecteur et n = [25,64]
p = sum(n) ; p est un réel et p = 89.

Exemple d'affichage de la console :

Entrer les valeurs des abscisses : x = [x1,x2,...,xn] ; x = [0,1,2,3,4,5,6]
Entrer les valeurs des ordonnées : y = [y1,y2,...,yn] ; y = [8.44,8.67,8.82,8.86,9.09,9.31,9.43]
Point moyen : G(3.0000 ; 8.9457)
Equation de la droite :
y = 0.1614 x + 8.4614